Državno natjecanje iz fizike 2025./2026.

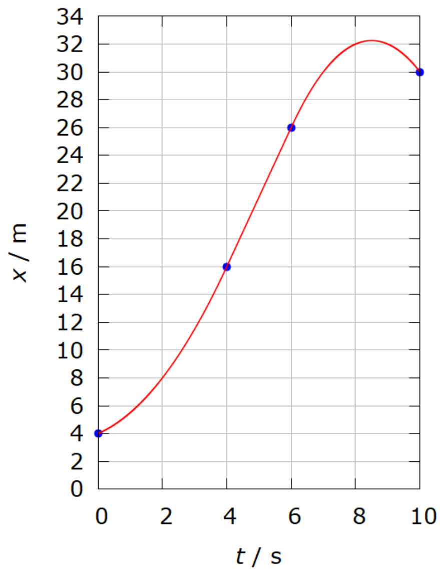
Vodice, 12. – 15. svibnja 2026.

Srednje škole – 1. skupina

VAŽNO: Tijekom ispita učenici ne smiju imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule i dr.). Za pisanje treba se koristiti kemijskom olovkom ili nalivperom. Učenici pri ruci ne smiju imati mobitel ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

1. zadatak (20 bodova)

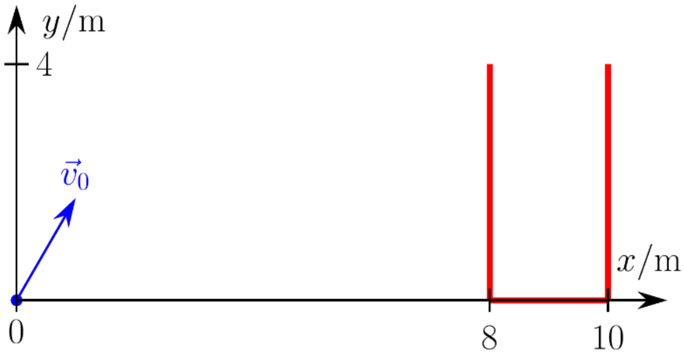
Položaj tijela u vremenu prikazan je na *x*-*t* dijagramu desno. Sila na tijelo mijenja se u označenim točkama, a između dviju susjednih označenih točaka ostaje stalna. Odredite brzinu tijela u ovisnosti o vremenu te nacrtajte *v*-*t* dijagram gibanja tijela.



2. zadatak (15 bodova)

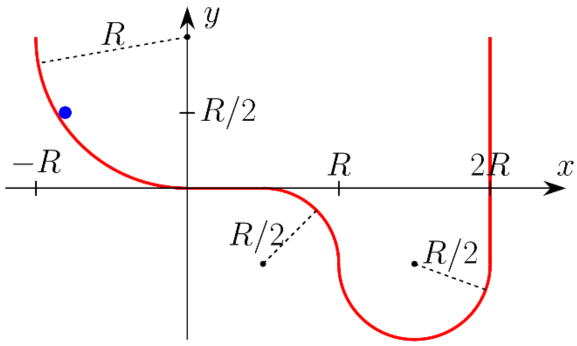
Neka se u svemiru nalaze samo tri tijela u obliku jednakih kugli, radijusa R i mase M. U početnom trenutku miruju, a njihova središta nalaze se u Oxy ravnini na položajima $(0, 0)$, $(20R, 0)$, $(10R, 10R\sqrt{3})$. Nacrtajte sile na tijela u početnom trenutku. Kako se odnose putovi, koje prijeđe svako tijelo prije sudara, i radijus R.

3. zadatak (15 bodova)



Kojim sve početnim brzinama bacač može izbaciti tijelo mase 100 g s tla pod kutom od 60° prema vodoravnoj podlozi, tako da tijelo upadne u spremnik udaljen 8 m od bacača, a čiji se otvor širine 2 m nalazi na visini 4 m od tla, kao na slici? Na tijelo djeluje stalna horizontalna sila vjetra od 1 dN, usmjerena od spremnika prema bacaču. Ubrzanje slobodnoga pada iznosi $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$.

4. zadatak (20 bodova)



Tijelo miruje u točki $(-R\sqrt{3}/2, R/2)$ na stazi koja je po dijelovima zakrivljena, kao što je prikazano na slici. Nakon što ga pustimo, tijelo se počinje gibati te u trenutku $t = 0$ prolazi ishodištem (0,0). Trenje i otpor zraka su zanemarivi. Ubrzanje slobodnoga pada iznosi g. Na dijelu putanje gdje je $0 \leq x \leq 1.5R$, izrazite preko R i g kako se visina tijela y mijenja u ovisnosti o vremenu te u ovisnosti o koordinati x. U prvom trenutku kada je koordinata položaja $x = 1.5R$, izrazite preko R udaljenost tijela od $(-R\sqrt{3}/2, R/2)$.

Državno natjecanje iz fizike 2025./2026.
Srednje škole – 1. skupina

Rješenja i smjernice za bodovanje

U smjernicama je naveden samo jedan mogući način rješavanja, a treba priznati i bilo koji drugi ispravan postupak. Boduju se i drugi zapisi ako su u skladu s odabranim referentnim sustavom i napisanim jednadžbama u mjernim jedinicama po slobodnom izboru. Ako su preskočene trivijalne linije koje se boduju, a jednadžbe u nastavku su dobre, priznaju se bodovi kao da je napisano sve. Ne boduju se formule u kojima je upisan krivi iznos neke fizičke veličine. Dodjeljuju se samo cjelobrojni bodovi. Svaka novouvedena veličina treba biti jasno definirana ili označena na skici.

1. zadatak (20 bodova)

Radi jednostavnosti koristit ćemo se pokratama $t_i \equiv i$ s, $i \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $x_i \equiv x(t_i)$, $v_i \equiv v(t_i)$, $\Delta t_i \equiv t - t_i$ te $x_{i,j}$ i $a_{i,j}$ za relacije koje vrijede od trenutka t_i do t_j. Na danom $x - t$ dijagramu očitamo položaje:

$$x_0 = 4\ \mathrm{m},\ x_2 = 8\ \mathrm{m},\ x_4 = 16\ \mathrm{m},\ x_6 = 26\ \mathrm{m},\ x_8 = 32\ \mathrm{m},\ x_{10} = 30\ \mathrm{m}. \tag{1}$$

U pojedinim vremenskim intervalima, redom između t_0, t_4, t_6 i t_{10} akceleracija je stalna jer je stalna sila te iznosi $a_{0,4}$, $a_{4,6}$ i $a_{6,10}$. Tada su položaji dani izrazima:

[1 bod] $x_{0,4}(t) = x_0 + v_0\,\Delta t_0 + 0.5\,a_{0,4}\,(\Delta t_0)^2$

[1 bod] $x_{4,6}(t) = x_4 + v_4\,\Delta t_4 + 0.5\,a_{4,6}\,(\Delta t_4)^2$

[1 bod] $x_{6,10}(t) = x_6 + v_6\,\Delta t_6 + 0.5\,a_{6,10}\,(\Delta t_6)^2$.

Uvrštavanjem poznatih vrijednosti (1), dobivamo skup jednadžbi

[1 bod] $x_0 = 4\ \mathrm{m},\ x_2 = 4\ \mathrm{m} + (2\ \mathrm{s})v_0 + (2\ \mathrm{s}^2)a_{0,4} = 8\ \mathrm{m},\ x_4 = 4\ \mathrm{m} + (4\ \mathrm{s})v_0 + (8\ \mathrm{s}^2)a_{0,4} = 16\ \mathrm{m}$

[1 bod] $x_6 = 16\ \mathrm{m} + (2\ \mathrm{s})v_4 + (2\ \mathrm{s}^2)a_{4,6} = 26\ \mathrm{m}$

[1 bod] $x_8 = 26\ \mathrm{m} + (2\ \mathrm{s})v_6 + (2\ \mathrm{s}^2)a_{6,10} = 32\ \mathrm{m},\ x_{10} = 26\ \mathrm{m} + (4\ \mathrm{s})v_6 + (8\ \mathrm{s}^2)a_{6,10} = 30\ \mathrm{m}$

iz kojih dobivamo:

[1 bod] $v_0 = 1\ \mathrm{ms}^{-1}$, $a_{0,4} = 1\ \mathrm{ms}^{-2}$

[1 bod] $v_{0,4}(t) = v_0 + a_{0,4}\,\Delta t_0 = 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t$

[1 bod] $v_4 = 5\ \mathrm{ms}^{-1}$

[1 bod] $a_{4,6} = 0\ \mathrm{ms}^{-2}$

[1 bod] $v_{4,6}(t) = 5\ \mathrm{ms}^{-1}$

[1 bod] $v_6 = 5\ \mathrm{ms}^{-1}$

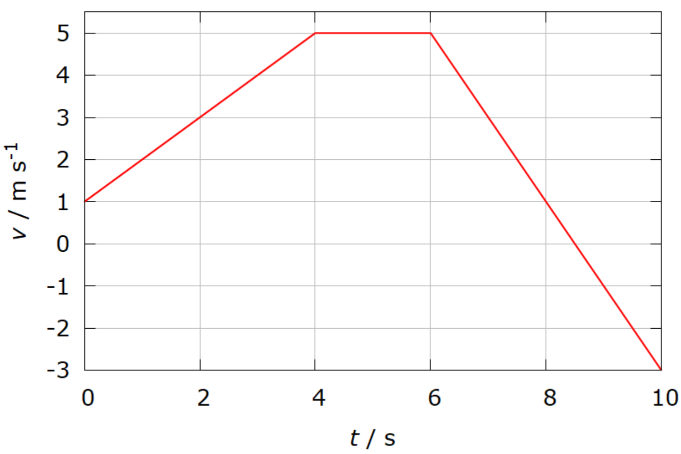
[1 bod] $a_{6,10} = -2\ \mathrm{ms}^{-2}$

$v_{6,10}(t) = v_6 + a_{6,10}\,\Delta t_6$

[1 bod] $v_{6,10}(t) = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(t - 6\ \mathrm{s})$

[1 bod] $v_{10} = -3\ \mathrm{ms}^{-1}$,

što je prikazano na $v - t$ dijagramu:



[1 bod] oznaka vremena i mjerna jedinica

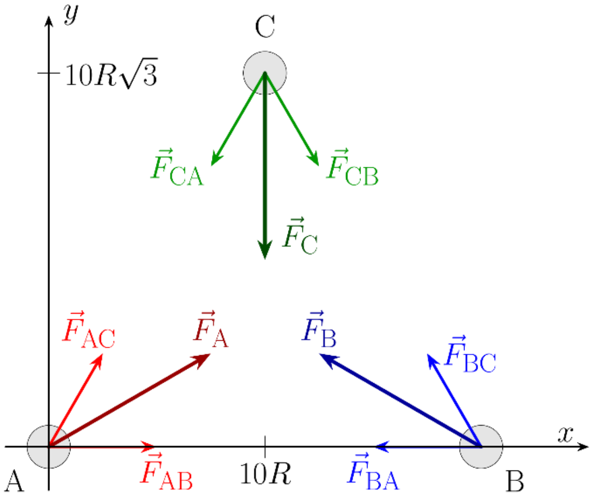
[1 bod] oznaka brzine i mjerna jedinice

[1 bod] točno nacrtana linija $v_{0,4}(\mathrm{t})$

[1 bod] točno nacrtana linija $v_{4,6}(\mathrm{t})$

[1 bod] točno nacrtana linija $v_{6,10}(\mathrm{t})$ ili $|v_{6,10}|(\mathrm{t})$.

2. zadatak (15 bodova)



U početnom se trenutku $t = 0$ središta tijela (kugli) nalaze u točkama $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(20R,0)$ i $\mathrm{C}(10R, 10R\sqrt{3})$ koje čine jednakostranični trokut ABC jer je

[1 bod] $a = |\mathrm{AB}| = |\mathrm{AC}| = |\mathrm{BC}| = 20R$.

Tijela se međusobno privlače gravitacijskim silama jednakog iznosa

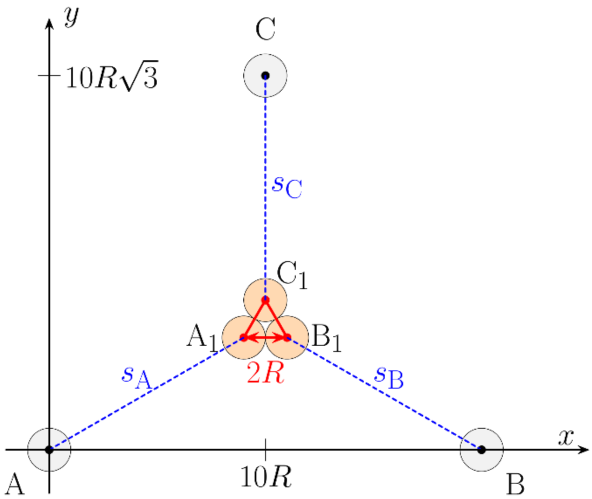
[1 bod] $|F_{ij}| = GM^2a^{-2}$,

gdje je a udaljenost središta kugli. U $t = 0$, sile su prikazane na slici desno:

[2 boda] $\vec{F}_A = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC}$,

[2 boda] $\vec{F}_B = \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{BC}$,

[2 boda] $\vec{F}_C = \vec{F}_{CA} + \vec{F}_{CB}$ (za pojedinu silu $\vec{F}_{CA}$, $\vec{F}_{CB}$ po 1 bod ili 2 boda za rezultantu $\vec{F}_C$ te slično za $\vec{F}_{A,B}$).



Zbog simetrije sva tri tijela tijekom gibanja čine jednakostranični trokut koji se postupno smanjuje prema sjecištu visina S u trokut $\mathrm{A_1B_1C_1}$ kada se kugle sudaraju, kao na slici desno.

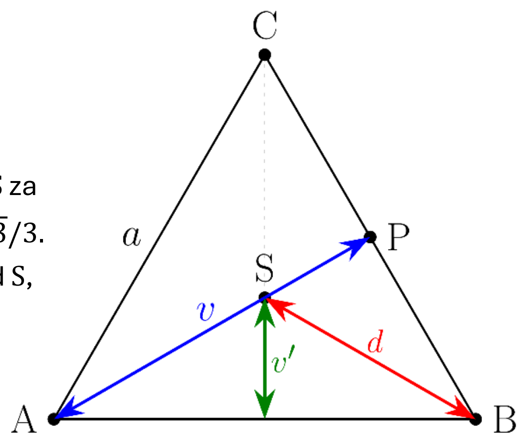
[1 bod] Naime, rezultante $\vec{F}_{A,B,C}$ stalno su usmjerene iz vrha prema polovištu nasuprotne stranice, a prema tome i brzine. Svako tijelo ide pravocrtno, prateći visinu jednakostraničnog trokuta do sudara, kada su središta kugli međusobno udaljena

[1 bod] $a_1 = 2R$.

Podijelimo li trokut ABC na 3 sukladna trokuta ABS, BCS i CAS kao na slici desno, iz površina slijede odnosi visina

$P_{ABC} = P_{ABS} + P_{BCS} + P_{CAS} = 3P_{ABS}$,

[1 bod] $av/2 = 3av'/2 \implies v' = v/3 = a\sqrt{3}/6$.



Vrhovi trokuta ABC udaljeni su od sjecišta visina S za

[1 bod] $d = |\mathrm{AS}| = |\mathrm{BS}| = |\mathrm{CS}| = v - v' = 2v/3 = 20R\sqrt{3}/3$.

Slično slijedi udaljenost vrhova trokuta $\mathrm{A_1B_1C_1}$ od S,

$d_1 = |\mathrm{A_1S}| = |\mathrm{B_1S}| = |\mathrm{C_1S}| = 2v_1/3$.

Visina trokuta $\mathrm{A_1B_1C_1}$, iznosi

$v_1 = a_1\sqrt{3}/2 = R\sqrt{3}$ pa je

[1 bod] $d_1 = 2R\sqrt{3}/3$.

Tijela B i C prijeđu jednak put kao i tijelo A,

[1 bod] $s_A = |\mathrm{AA_1}| = \mathrm{d} - d_1$. Dakle,

[1 bod] $s_A = s_B = s_C = (20-2)R\sqrt{3}/3 = 6\sqrt{3}R \implies s_A/R = s_B/R = s_C/R = 6\sqrt{3}$.

3. zadatak (15 bodova)

Na tijelo mase $m = 100\ \mathrm{g} = 0.1\ \mathrm{kg}$, izbačeno iz ishodišta početnom brzinom v_0, pod kutom od 60° s obzirom na os x, cijelo vrijeme gibanja djeluje gravitacijska sila $F_y = -mg$ suprotno y-smjeru te konstantna sila vjetra $F_x = -0.1\ \mathrm{N}$ suprotno x-smjeru pa akceleracije prema 2. Newtonovu zakonu iznose:

[1 bod] $a_x = F_x/m = -1\ \mathrm{ms}^{-2}$,

[1 bod] $a_y = F_y/m = -g = -9.81\ \mathrm{ms}^{-2}$.

Složeno gibanje analiziramo kao dva neovisna gibanja sa stalnim akceleracijama a_x i a_y te početnim brzinama

[1 bod] $v_{0x} = v_0 \cos 60° = 0.5\ v_0$

[1 bod] $v_{0y} = v_0 \sin 60° = 0.5\sqrt{3}\ v_0$.

Tada su koordinate položaja tijela

[1 bod] $x = 0.5\ v_0\ t + 0.5\ a_x\ t^2$ (1)

[1 bod] $y = 0.5\sqrt{3}\ v_0\ t + 0.5\ a_y\ t^2$. (2)

Početnu brzinu izrazimo iz (1)

[1 bod] $v_0 = (2\ x - a_x\ t^2)/t$ (3)

i uvrstimo u dvostruki (2) za visinu spremnika $y = 4\ \mathrm{m}$,

[1 bod] $8\ \mathrm{m} = 2\sqrt{3}\ x - \sqrt{3}\ a_x\ t^2 + a_y\ t^2$

iz čega slijedi vrijeme proteklo do dolaska u točku $(x, 4\ \mathrm{m})$,

[1 bod] $t^2 = \left(8\ \mathrm{m} - 2\sqrt{3}\ x\right)/\left(a_y - \sqrt{3}a_x\right) \implies t = \sqrt{\left(8\ \mathrm{m} - 2\sqrt{3}\ x\right)/\left(a_y - \sqrt{3}a_x\right)}$. (4)

Tijelo na visini $y = 4\ \mathrm{m}$ upast će u spremnik ako su njegove koordinate između

[1 bod] $x_8 = 8\ \mathrm{m}$ i

[1 bod] $x_{10} = 10\ \mathrm{m}$

što se prema (4) postiže za vrijeme

[1 bod] $t_8 \approx \sqrt{2.44}\ \mathrm{s} \approx 1.56\ \mathrm{s}$ i

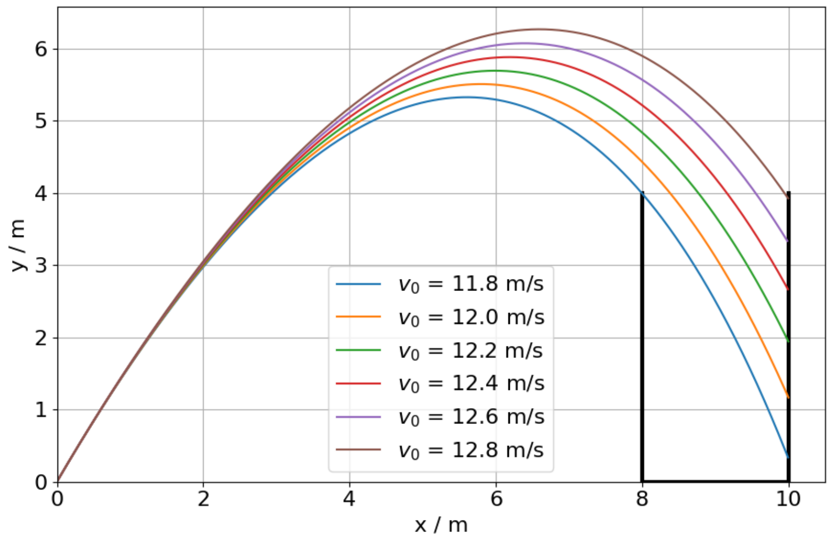
[1 bod] $t_{10} \approx \sqrt{3.30}\ \mathrm{s} \approx 1.82\ \mathrm{s}$

pa početne brzine prema (3) mogu biti između

[1 bod] $v_0 \approx 11.8\ \mathrm{m/s}$ i

[1 bod] $v_0 \approx 12.8\ \mathrm{m/s}$, odnosno

$11.8\ \mathrm{m/s} \lesssim v_0 \lesssim 12.8\ \mathrm{m/s}$.



4. zadatak (20 bodova)

Tijelo mase m, netom prije puštanja u trenutku t_M, miruje, $v_\mathrm{M} = 0$, u točki $\mathrm{M}(-R\sqrt{3}/2, R/2)$ na visini $y_\mathrm{M} = R/2$ u odnosu na os x koju odabiremo kao nultu razinu za gravitacijsku potencijalnu energiju. Ukupna mehanička energija jednaka je gravitacijskoj potencijalnoj,

[1 bod] $E(t_\mathrm{M}) = E_\mathrm{k}(t_\mathrm{M}) + E_\mathrm{gp}(t_\mathrm{M}) = mv_\mathrm{M}^2/2 + mgy_\mathrm{M} = mgR/2.$

Tijelo u trenutku $t_0 = 0$ dolazi u $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ te postiže brzinu v_0. Ukupna energija,

[1 bod] $E(t_0) = E_\mathrm{k}(t_0) + E_\mathrm{gp}(t_0) = mv_0^2/2 + mgy_0 = mv_0^2/2,$

jednaka je onoj u trenutku $t = t_\mathrm{M}$, jer su zanemarivi trenje i otpor zraka,

[1 bod] $mgR/2 = mv_0^2/2,$

iz čega slijedi brzina u x-smjeru (vodoravnom)

[1 bod] $v_0 = \sqrt{gR}.$

Na vodoravnom dijelu ukupna sila iščezava pa se tijelo giba jednoliko, bez promjene visine,

[1 bod] $y = 0$, od $x_0 = 0$ do $x_1 = R/2$ (1)

gdje je brzina u x-smjeru jednaka v_0,

[1 bod] $v_1 = v_0 = \sqrt{gR}.$

U trenutku

[1 bod] $t_1 = t_0 + (x_1 - x_0)/v_1 = 0.5\sqrt{R/g}$ (2)

tijelo se nalazi na početku drugog luka radijusa

[1 bod] $r = R/2.$

Da bi tijelo ostalo priljubljeno uz podlogu, potrebna je centripetalna akceleracija

[1 bod] $a_\mathrm{c} = v_1^2/r = 2gR/R = 2g$

[1 bod] što je manje od g, odnosno najveće akceleracije prema središtu $(R/2, -R/2)$ koju može dati gravitacijska sila. Zato se tijelo odvaja u početnoj točki drugog luka $(x_1 = R/2, y_1 = 0)$ te izvodi horizontalni hitac s početnom brzinom v_1 u x-smjeru:

[1 bod] $x(t) = x_1 + v_1\,(t - t_1) = R/2 + \sqrt{gR}\,(t - t_1),$ (3)

[1 bod] $y(t) = -0.5\,g\,(t - t_1)^2.$ (4)

Gibanje analiziramo do trenutka, kada je $x_2 = 1.5R$,

[1 bod] $t_2 = t_1 + (x_2 - x_1)/v_1 = 0.5\sqrt{R/g} + R/\sqrt{gR} = 1.5\sqrt{R/g}.$ (5)

Iz (3) izrazimo vremenski interval $(t - t_1)$ te uvrstimo u (4) da eliminiramo vrijeme,

[1 bod] $t - t_1 = (x - R/2)/\sqrt{gR},$

[1 bod] $y(x) = -0.5\,g\,(x - R/2)^2/(gR) = -(x - R/2)^2/(2R).$ (6)

Iz (1), (2), (3), (4), (5) i (6) slijede konačni zapisi visine y u ovisnosti o t i x:

[1 bod] $y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 0.5\sqrt{R/g} \\ -0.5\,g\left(t - 0.5\sqrt{R/g}\right)^2, & 0.5\sqrt{R/g} \le t \le 1.5\sqrt{R/g}, \end{cases}$

[1 bod] $y(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 0.5R \\ -(x - R/2)^2/(2R), & 0.5R \le x \le 1.5R. \end{cases}$

U trenutku t_2 tijelo se nalazi na položaju

[1 bod] $(x_2 = 1.5R, y_2 = -R/2)$

odnosno u središtu donje polukružnice kada je od početnog položaja udaljeno

[1 bod] $d = \sqrt{(|x_0| + x_2)^2 + (y_0 + |y_2|)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}R/2 + 3R/2\right)^2 + (R/2 + R/2)^2} =$

[1 bod] $d = 0.5R\sqrt{\left(\sqrt{3} + 3\right)^2 + 4} = 0.5R\sqrt{16 + 6\sqrt{3}} \approx 2.57R.$

Srednje škole - 1. grupa

EKSPERIMENTALNI ZADATAK

Određivanje faktora statičkog trenja između gumene lopte i novčića

(30 bodova)

Pribor: gumena lopta, novčić, ravnalo i mjerna traka

Zadatak i upute:

1) Postavite novčić na vrh gumene lopte i loptu lagano naginjite dok ne dođete do položaja u kojemu novčić počne kliziti. Zabilježite visinu u h na kojoj novčić počinje kliziti niz loptu. (**5 bodova)**

2) Nacrtajte dijagram sila na novčić u situaciji u kojoj novčić taman počinje kliziti niz loptu. **(5 bodova)**

3) Odredite polumjer lopte R. **(5 bodova)**

4) Izvedite izraz za faktor statičkog trenja između novčića i lopte. Izraz mora sadržavati samo mjerene veličine h i R. **(5 bodova)**

5) Napravite 10 mjerenja i rezultate mjerenja prikažite tablično. **(5 bodova)**

6) Odredite srednje vrijednosti i odstupanja od srednje vrijednosti za faktor statičkog trenja između novčića i lopte. **(5 bodova)**

Napomena:

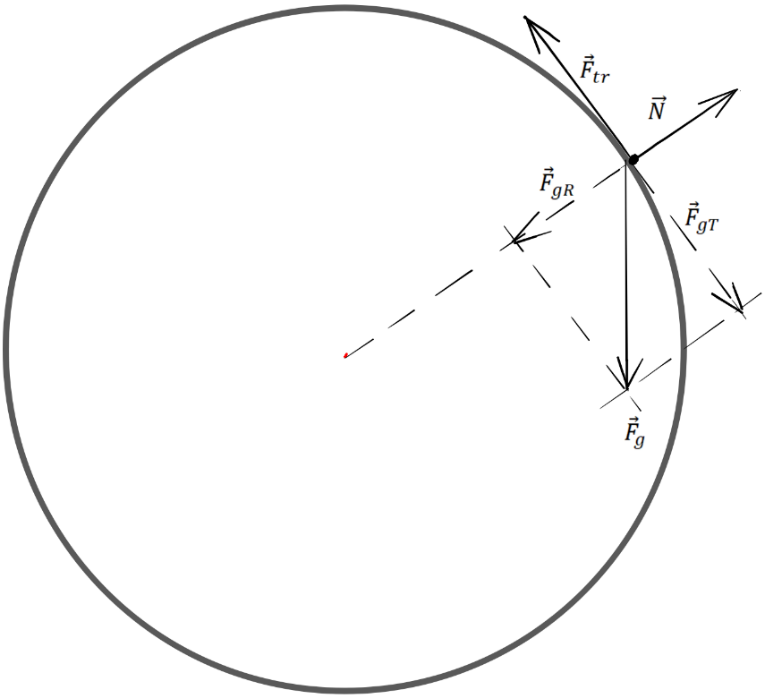
Zadatak treba napraviti prema navedenim uputama.

Srednje škole 1. grupa

RJEŠENJE EKSPERIMENTALNOG ZADATKA

1) Novčić se postavi na vrh lopte i olovkom zabilježi položaj novčića. Lopta se polako naginje dok novčić ne počne kliziti niz loptu. Pomoću ravnala izmjeri se visina na kojoj se novčić nalazi u trenutku proklizavanja.
Za navedeni postupak i mjerenje visine ukupno 5 bodova.

2) Na slici je prikazana situacija u kojoj novčić taman počinje kliziti niz loptu. Prikazan je dijagram sila.



Oznake koje se koriste na crtežu su:
F_g – sila teža,
F_{gR} – radijalna komponenta sile teže,
F_{gT} – tangencijalna komponenta sile teže,
N – reakcija podloge,
F_{tr} – maksimalno statičko trenje klizanja.
Za ispravno nacrtanu svaku navedenu silu po 1 bod.
Ukupno 5 bodova.

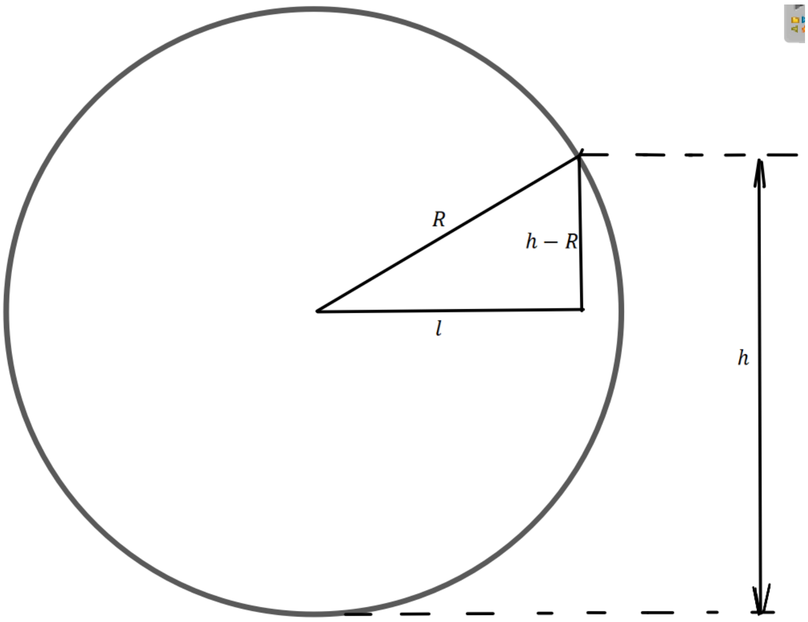
3) Pomoću mjerne trake izmjeri se opseg *o* lopte a iz opsega se odredi polumjer lopte *R*.
$o = 2R\pi\, ; R = \frac{o}{2\pi}$
Za mjerenje opsega lopte 3 boda za određivanje polumjera 2 boda.
Ukupno 5 bodova.

4) U situaciji u kojoj novčić počinje kliziti niz loptu vrijedi:

$$F_{gR} = N$$
$$F_{gT} = F_{tr}$$

uz $F_{tr} = \mu N$.

Iz sličnosti trokuta vrijedi:



$$\frac{F_{gT}}{F_{gR}} = \frac{l}{h - R}$$

Dalje vrijedi: $l = \sqrt{R^2 - (h - R)^2}$
Kombiniranjem navedenih relacija dobije se:

$$\mu = \frac{\sqrt{h(2R - h)}}{h - R}$$

Za svaku navedenu relaciju po 1 bod ukupno 5 bodova.

5) Napravi se 10 mjerenja i rezultati se prikažu tablično.
   Za svako obavljeno mjerenje po 0,5 bodova ukupno 5 bodova

6) Odredi se srednja vrijednost statičkog koeficijenta trenja i odstupanja od srednjih vrijednosti .
   Za svaki izračun odstupanja od srednje vrijednosti po 0,5 bodova ukupno 5 bodova.

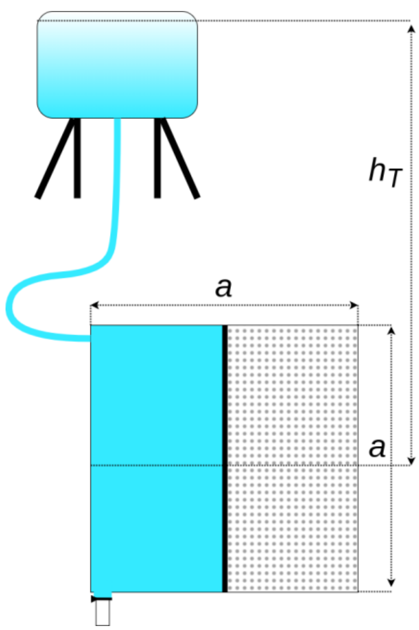
Državno natjecanje iz fizike 2025./2026.

Vodice, 12. – 15. svibnja 2026.

Srednje škole – 2. skupina

VAŽNO: Tijekom ispita učenici ne smiju imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule...). Za pisanje treba se koristiti kemijskom olovkom ili nalivperom. Učenici pri ruci ne smiju imati mobitel ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

1. zadatak (18 bodova)



Promotrite sustav shematski prikazan na slici koji je sastavljen od vodotornja, dovodne cijevi zanemarivog poprečnog presjeka, komore oblika kocke duljine stranice $a = 1$ dm s klipom zanemarive debljine koji u njoj može kliziti bez trenja i ventila. Voda ispunjava lijevi dio komore i vodotoranj do određene razine te je visinska razlika između točke u centru komore i površine vode u vodotornju jednaka $h_T = 10$ m. Desnu polovicu komore ispunjava dvoatomni idealni plin.

U početnom trenutku, dok klip miruje, na sredini komore polako se počinje otvarati ventil tako da tok vode kroz njega ovisi o vremenu kao $I = I_0 t/\tau$, pri čemu su iznosi konstanti jednaki $I_0 = 3$ L/s te $\tau = 1$ h.

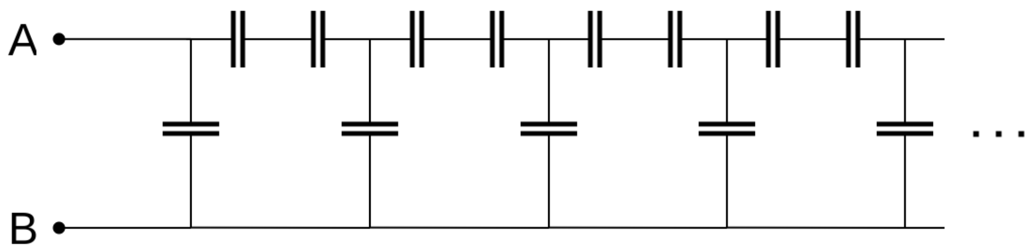
a) Odredite jednadžbu koja povezuje trenutačni volumen plina V_{plin} i vrijeme t. U jednadžbi, osim volumena plina i vremena, sve ostale veličine kojima se koristite moraju biti poznate. Naputak: koristite se varijablama za zapis jednadžbe, a ne numeričkim vrijednostima, i imajte na umu da u ovom podzadatku ne morate rješavati ovu jednadžbu za te dvije nepoznanice, odnosno ne morate je sređivati te je možete zapisati u obliku $f(V_{plin}, t) = 0$.

b) Odredite koliko vremena protekne do trenutka kada se volumen plina promijeni za 10% te koliki je ukupni rad kojega plin obavi u tom vremenu.

Pretpostavite da su dimenzije komore dovoljno malene u usporedbi s visinskom razlikom do razine površine vode u vodotornju tako da se hidrostatski tlak vode u komori može uzeti da je jednak u svim točkama unutar komore te uzmite da se hidrostatski tlak mjeri u centru komore. Osim toga, uzmite da je otvaranje ventila tako sporo da su sile na klip uvijek izjednačene te da su isto tako sile na klip prije otvaranja ventila izjednačene. Pretpostavite da je vodotoranj tolike zapremnine da se razina vode u njemu ne mijenja zbog protoka vode kroz cijevi, komoru i ventil te da je vodotoranj sa svoje gornje strane otvoren k atmosferi. Konačno, pretpostavite da plin ne izmjenjuje toplinu s okolinom. Zanemarite promjene u toku vode zbog pomicanja klipa. Gustoća vode je konstantna i iznosi 1 kg/L.

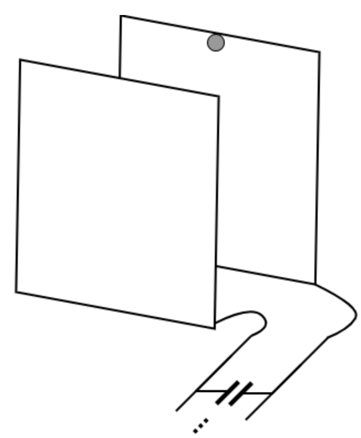
2. zadatak (20 bodova)

Promotrite beskonačan sustav kondenzatora posložen u obliku ljestava čija je shema dana na slici.



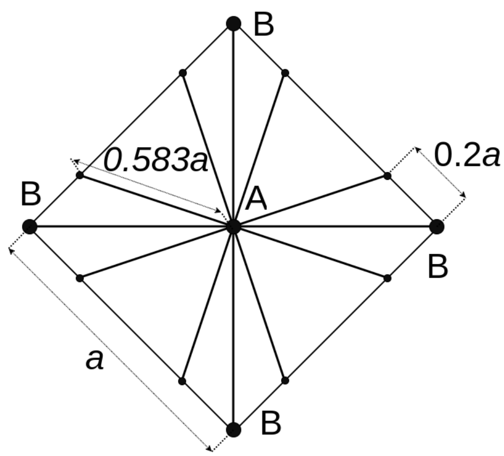
a) Ako su kapaciteti svih kondenzatora u sustavu jednaki i iznose 20 nF, odredite koliki je ukupni kapacitet između terminala A i B sa slike. Naputak: kako je zadani sustav beskonačan, probajte ga prikazati kao spoj nekog konačnog sustava i sustava identičnog zadanom.

b) Sustav iz prethodnog podzadatka sada nabijemo s ukupno 100 mC naboja te potom spojimo terminale A i B na ploče planparalelnog kondenzatora oblika kvadrata, duljine stranice 50 cm i razmaka među pločama 20 cm. Ploče postavimo tako da su orijentirane okomito te uz pozitivno nabijenu ploču, na njezinu gornjem rubu, pritisnemo malu metalnu kuglicu mase 10 g. Kada kuglica dotakne ploču, ona se nabije s 50 nC naboja te je tada pustimo u gibanje. Skica ovog postava dana je na slici desno. Odredite koliki je iznos ukupne konačne brzine koju kuglica ima kada izađe iz polja kondenzatora i koliko vremena protekne do tog trenutka.



Pretpostavite da su sve spojne žice idealni vodiči te da je električno polje unutar planparalelnog kondenzatora savršeno homogeno. Za gibanje kuglice pretpostavite da se ona u svakom sudaru s pločama nabije tako da je iznos naboja koji ona nosi 50 nC te da su ti sudari savršeno elastični. Zanemarite otpor zraka i pretpostavite da je naboj koji kuglica izmjenjuje s pločama kondenzatora dovoljno malen da ne mijenja ni naboj na pločama ni električno polje u kondenzatoru. Pretpostavite i to da nema nikakvih izboja niti curenja naboja s ploča kondenzatora. Konačno, uzmite da je permitivnost zraka jednaka permitivnosti vakuuma i iznosi $8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m.

3. zadatak (19 bodova)



Promotrite sklop napravljen od cilindričnih otpornih žica identičnih radijusa u obliku kvadrata prikazanog shematski na slici. Sve su žice napravljene od posebnog kristala koji, kada se zagrijava, ima fazni prijelaz iz stanja visoke otpornosti u stanje niske otpornosti koja je 100 puta manja od otpornosti prije faznog prijelaza.

Istosmjerni naponski izvor spoji se s jednim svojim terminalom u točku *A* sklopa, dok se drugi terminal spoji paralelno na sve četiri točke *B* te se žice, čija je početna temperatura točno temperatura faznog prijelaza, počnu zagrijavati.

a) Odredite ekvivalentni otpor tako spojenog strujnog kruga. Otpor žice u fazi visoke otpornosti čija duljina odgovara duljini stranice kvadrata je 1 Ω.

b) Odredite ekvivalentni otpor nakon što prva skupina žica prođe kroz fazni prijelaz. Identificirajte sve žice koje su tada prošle kroz fazni prijelaz. Naputak: razmislite kako toplina koja se oslobađa u otpornoj žici ovisi o njezinoj duljini.

c) Odredite omjer vremena koliko je potrebno da prva skupina žica prođe kroz fazni prijelaz te vremena potrebnog da druga skupina žica prođe kroz fazni prijelaz. Postoje li neke žice u ovom sklopu koje nikada neće proći kroz fazni prijelaz?

Pretpostavite da nema termalnog širenja, da se prilikom faznog prijelaza kristalu ne mijenjaju ni gustoća ni oblik te da otpor svih žica ostaje konstantan dok se u potpunosti ne dovrši fazni prijelaz. Uzmite da izvor nema unutarnji otpor. Zanemarite vođenje topline i sve toplinske gubitke u sustavu.

Napomena: u ovom zadatku žicom zovemo svaki individualni ravni segment između spojeva na shemi. Spojevi su na shemi označeni krugovima te se nalaze na račvanjima sklopa, što uključuje točke *A* i *B*. Sveukupno, dakle, sklop koji promatramo ima 24 žice i 13 spojeva. Spojevi ne unose dodatan otpor u strujni krug.

4. zadatak (13 bodova)

U zatvorenoj komori s klipom nalazi se 6 mola vodikovih molekula. U komoru se ubrizga 3 mola kisikovih molekula. Potom se pomicanjem klipa volumen komore smanjuje dok se plinska smjesa ne samozapali na temperaturi od 500 stupnjeva Celzijevih. Pretpostavite da tokom ubrizgavanja plina i gibanja klipa nema izmjene topline s okolinom, da klip bez trenja klizi u horizontalnom smjeru unutar komore te da je klip za vrijeme gorenja i procesa nakon gorenja fiksiran.

a) Odredite koja je konačna temperatura vode u komori nakon što sav vodik i kisik izgore.

b) Nakon što je gorenje gotovo, sustavu se omogući izmjena topline s okolinom te se ovaj proces odvija dok se tlak u komori ne smanji 10 puta. Odredite konačnu temperaturu sustava, te koliko je vode u kojemu agregacijskom stanju.

Pretpostavite da se gorenje odvije trenutačno, pri čemu se po dva atoma vodika i jedan atom kisika povežu kako bi stvorili jednu molekulu vode. U takvoj reakciji oslobađa se toplina te u tom sustavu možete pretpostaviti da gorenje oslobađa efektivno 2.858 kJ/mol topline (računato po molu molekula vodika), a tako oslobođena toplina povećava unutarnju energiju sustava. Uzmite da je sva novonastala voda u plinovitom stanju.

Zanemarite volumen u komori koji zauzima voda u tekućem stanju te pretpostavite da stanje tlaka u komori nema utjecaja na ukapljivanje vode. Uzmite da se svi plinovi mogu opisati kao idealni dvoatomni plinovi (uključujući i vodenu paru, gdje uzimamo da temperatura neće biti dovoljno visoka da pobudi dodatne stupnjeve slobode). Molekule vodika i imaju po dva vodikova atoma, kao i molekule kisika koje se sastoje od po dva atoma kisika.

Fizikalne konstante:

g = 9.81 m/s^2
p_{atm} = 1 atm = 101300 Pa
T_0 = -273.15 °C
R = 8.314 J/Kmol

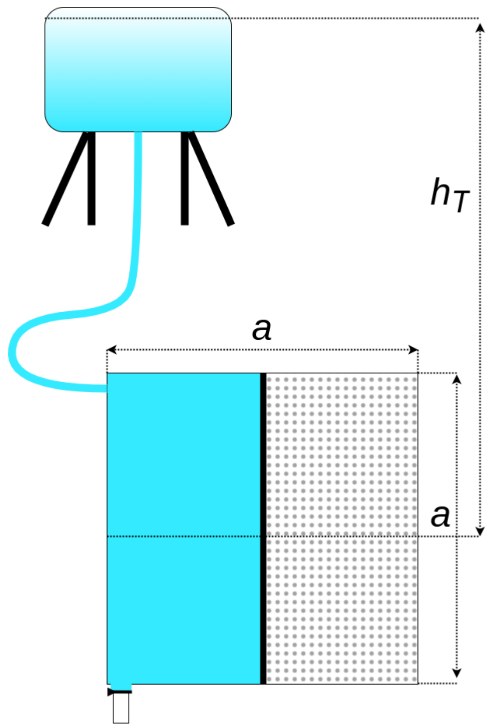
DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE – 13. svibnja 2026.

Srednje škole – 2. skupina

Rješenja i smjernice za bodovanje

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak na drugačiji, a fizikalno pravilan način, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali. Najmanja jedinica bodova koja se dodjeljuje jest 1 bod.

Zadatak 1. (ukupno bodova: 18)



Promotrite sustav shematski prikazan na slici koji je sastavljen od vodotornja, dovodne cijevi zanemarivog poprečnog presjeka, komore oblika kocke duljine stranice $a = 1$ dm s klipom zanemarive debljine koji u njoj može kliziti bez trenja i ventila. Voda ispunjava lijevi dio komore i vodotoranj do određene razine te je visinska razlika između točke u centru komore i površine vode u vodotornju jednaka $h_T = 10$ m. Desnu polovicu komore ispunjava dvoatomni idealni plin.

U početnom trenutku, dok klip miruje, na sredini komore polako se počinje otvarati ventil tako da tok vode kroz njega ovisi o vremenu kao $I = I_0 t/\tau$, pri čemu su iznosi konstanti jednaki $I_0 = 3$ L/s te $\tau = 1$ h.

(a) Odredite jednadžbu koja povezuje trenutačni volumen plina V_{plin} i vrijeme t. U jednadžbi, osim volumena plina i vremena, sve ostale veličine kojima se koristite moraju biti poznate. Naputak: koristite se varijablama za zapis jednadžbe, a ne numeričkim vrijednostima, i imajte na umu da u ovom podzadatku ne morate rješavati ovu jednadžbu za te dvije nepoznanice, odnosno ne morate je sređivati te je možete zapisati u obliku $f(V_{\text{plin}}, t) = 0$.

(b) Odredite koliko vremena protekne do trenutka kada se volumen plina promijeni za 10 % te koliki je ukupni rad koji plin obavi u tom vremenu.

Pretpostavite da su dimenzije komore dovoljno malene u usporedbi s visinskom razlikom do razine površine vode u vodotornju tako da se hidrostatski tlak vode u komori može uzeti da je jednak u svim točkama unutar komore, te uzmite da se hidrostatski tlak mjeri u centru komore. Osim toga, uzmite da je otvaranje ventila tako sporo da su sile na klip uvijek izjednačene, te da su isto tako sile na klip prije otvaranja ventila izjednačene. Pretpostavite da je vodotoranj tolike zapremnine da se razina vode u njemu ne mijenja zbog protoka vode kroz cijevi, komoru i ventil, te da je vodotoranj sa svoje gornje strane otvoren k atmosferi. Konačno, pretpostavite da plin ne izmjenjuje toplinu s okolinom. Zanemarite promjene u toku vode zbog pomicanja klipa. Gustoća vode je konstantna i iznosi 1 kg/L.

Rješenje:

(a) Ukupni tlak u komori ovisi o brzini vode u njoj i vrijedi **(1 bod za poznavanje ukupnog tlaka, 1 bod za ispravno uzimanje u obzir atmosferskog tlaka)**

$$p_{\text{stat}} = \rho g h_T + p_{\text{atm}} - p_{\text{din}} = \rho g h_T + p_{\text{atm}} - \frac{1}{2}\rho v_k^2 ,$$

pri čemu je ρ gustoća vode i v_k brzina vode u komori. Kako je voda nekompresibilna te kako nema račvanja i kako zanemarujemo promjene u toku vode zbog pomicanja klipa, tok vode u cijeloj komori mora biti jednak toku vode kroz ventil **(1 bod za ispravno korištenje očuvanja toka)**

$$I_k = I_{\text{ventil}} = I_0 t/\tau ,$$

s obzirom na to da je tok produkt površine poprečnog presjeka i brzine fluida, imamo **(1 bod za uspješno povezivanje brzine fluida u komori, vremena i pozicije klipa)**

$$v_k x a = I_k = I_{\text{ventil}} = I_0 t/\tau ,$$

pri čemu je x udaljenost klipa od lijevog zida komore. Volumen plina jednoznačno je određen tom varijablom

$$V_{\text{plin}} = a^2(a-x) ,$$

iz čega slijedi **(1 bod za uspješnu eliminaciju pozicije klipa iz prethodne jednadžbe,)**

$$v_k x a = v_k a\left(a - \frac{V_{\text{plin}}}{a^2}\right) = I_0 t/\tau .$$

Prema naputku u zadatku, ukupna sila na klip mora biti jednaka nuli, stoga je statički tlak jednak tlaku plina **(1 bod za zaključak o hidrostatskom tlaku)**. Kombiniranjem prethodno navedenih jednakosti imamo

$$\rho g h_T + p_{\text{atm}} - \frac{1}{2}\rho v_k^2 - p_{\text{plin}} = 0$$

$$\rho g h_T + p_{\text{atm}} - \frac{1}{2}\rho \frac{a^2 I_0^2}{(a^3 - V_{\text{plin}})^2 \tau^2} t^2 - p_{\text{plin}} = 0$$

Kako plin ne izmjenjuje toplinu s okolinom, riječ je o adijabatskom procesu **(1 bod za ispravno argumentiran zaključak da je riječ o adijabatskom procesu)** za koji vrijedi $p = p_0 V_0^\gamma / V^\gamma$ **(1 bod za točnu jednadžbu adijabate)**, pri čemu je γ adijabatska konstanta koja za dvoatomni plin iznosi 7/5 = 1.4, slijedi

$$\rho g h_T + p_{\text{atm}} - \frac{1}{2}\rho \frac{a^2 I_0^2}{(a^3 - V_{\text{plin}})^2 \tau^2} t^2 - \frac{p_{\text{plin},0} V_{\text{plin},0}^\gamma}{V_{\text{plin}}^\gamma} = 0 .$$

Konačno, uzmemo li u obzir da je početni tlak plina jednak ukupnom tlaku (jer nema toka) te da je njegov volumen $a^3/2$ **(1 bod za ispravan zaključak o početnom tlaku)**, dolazimo do tražene jednadžbe **(2 boda za točnu jednadžbu)**

$$\rho g h_T + p_{\text{atm}} - \frac{1}{2}\rho \frac{a^2 I_0^2}{(a^3 - V_{\text{plin}})^2 \tau^2} t^2 - (\rho g h_T + p_{\text{atm}}) \frac{(0.5a^3)^\gamma}{V_{\text{plin}}^\gamma} = 0 .$$

(b) Statički tlak u komori nakon otvaranja ventila se smanji, te se plin počne ekspandirati **(1 bod za točan zaključak kako se volumen plina mijenja)**. Stoga će traženi volumen morati iznositi

$1.1a^3/2 = 0.55a^3$ te se vrijeme potrebno za tu promjenu dobije rješavanjem jednadžbe koju smo prije postavili **(1 bod za uspješno sređivanje izraza, 1 bod za točan rezultat za vrijeme)**.

$$\rho g h_T + p_{\text{atm}} - \frac{1}{2}\rho \frac{a^2 I_0^2}{(a^3 - 0.55a^3)^2\tau^2} t^2 - (\rho g h_T + p_{\text{atm}}) \frac{(0.5a^3)^\gamma}{(0.55a^3)^\gamma} = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{2(1-0.55)^2\tau^2 a^4}{\rho I_0^2} (\rho g h_T + p_{\text{atm}}) \left(1 - \left(\frac{0.5}{0.55}\right)^{1.4}\right)} = 38113\,\text{s} \approx 10.56\,\text{h}\,.$$

Kako je riječ o adijabatskom procesu, rad koji plin obavlja bit će jednak smanjenju njegove unutarnje energije **(1 bod za točan zaključak o radu)**.

$$\Delta W = -\Delta U = -\frac{5}{2} n k_B \Delta T_{\text{plin}} = -\frac{5}{2}\Delta(p_{\text{plin}} V_{\text{plin}})\,,$$

Član koji odgovara produktu konačnog volumena i tlaka možemo dobiti iz jednadžbe adijabate **(1 bod za uspješnu kombinaciju izraza za rad i jednadžbe adijabate, 1 bod za uspješno sređivanje izraza)**

$$\Delta W = -\frac{5}{2}\Delta(p_{\text{plin}} V_{\text{plin}}) = \frac{5}{2}\left(p_{\text{plin},0} V_{\text{plin},0} - p_{\text{plin}} V_{\text{plin}}\right) = \frac{5}{2}\left(p_{\text{plin},0} V_{\text{plin},0} - p_{\text{plin},0} V_{\text{plin},0}^{\gamma} V_{\text{plin}}^{1-\gamma}\right)\,,$$

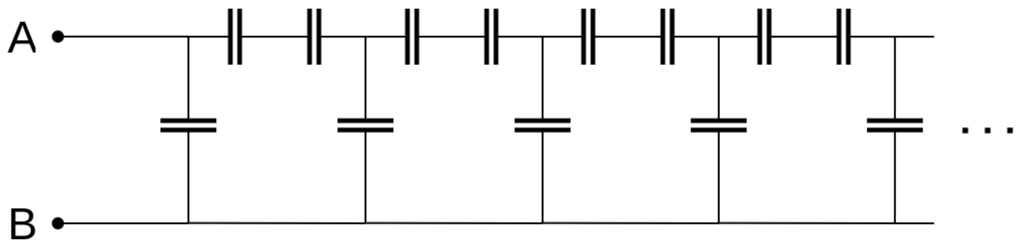
$$\Delta W = -\frac{5}{2}\Delta(p_{\text{plin}} V_{\text{plin}}) = \frac{5}{2}(\rho g h_T + p_{\text{atm}})\frac{a^3}{2}\left(1 - \left(\frac{0.5a^3}{0.55a^3}\right)^{1-\gamma}\right) = \frac{5}{2}(\rho g h_T + p_{\text{atm}})\frac{a^3}{2}\left(1 - \left(\frac{0.5}{0.55}\right)^{0.4}\right)\,,$$

u konačnici dobivamo **(1 bod za točan rezultat za rad)**

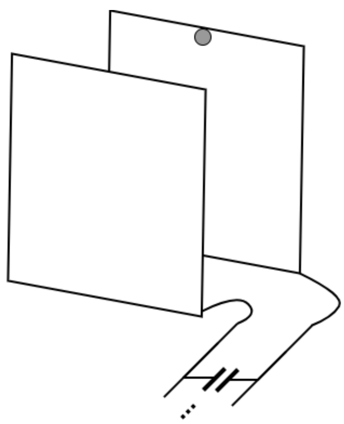
$$-\Delta W = 9.3235\,\text{J}\,.$$

Zadatak 2. (ukupno bodova: 20)

Promotrite beskonačan sustav kondenzatora posložen u obliku ljestava čija je shema dana na slici.



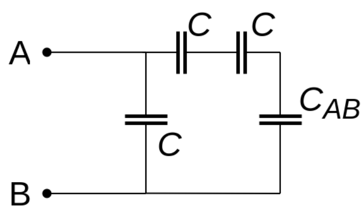
(a) Ako su kapaciteti svih kondenzatora u sustavu jednaki i iznose 20 nF, odredite koliki je ukupni kapacitet između terminala A i B sa slike. Naputak: kako je zadani sustav beskonačan, probajte ga prikazati kao spoj nekog konačnog sustava i sustava identičnog zadanom.



(b) Sustav iz prethodnog podzadatka sada nabijemo s ukupno 100 mC naboja te potom spojimo terminale A i B na ploče planparalelnog kondenzatora oblika kvadrata, duljine stranice 50 cm i razmaka među pločama 20 cm. Ploče postavimo tako da su orijentirane okomito te uz pozitivno nabijenu ploču, na njezinu gornjem rubu, pritisnemo malu metalnu kuglicu mase 10 g. Kada kuglica dotakne ploču, ona se nabije s 50 nC naboja te je tada pustimo u gibanje. Skica ovog postava dana je na slici lijevo. Odredite koliki je iznos ukupne konačne brzine koju kuglica ima kada izađe iz polja kondenzatora i koliko vremena protekne do tog trenutka.

Pretpostavite da su sve spojne žice idealni vodiči te da je električno polje unutar planparalelnog kondenzatora savršeno homogeno. Za gibanje kuglice pretpostavite da se ona u svakom sudaru s pločama nabije tako da je iznos naboja koji ona nosi 50 nC te da su ti sudari savršeno elastični. Zanemarite otpor zraka i pretpostavite da je naboj koji kuglica izmjenjuje s pločama kondenzatora dovoljno malen da ne mijenja ni naboj na pločama ni električno polje u kondenzatoru. Pretpostavite i to da nema nikakvih izboja niti curenja naboja s ploča kondenzatora. Konačno, uzmite da je permitivnost zraka jednaka permitivnosti vakuuma i iznosi 8.854 10^{-13} F/m.

Rješenje:



(a) Kako bismo riješili ovaj sustav, iskoristit ćemo njegovu simetriju. Sustav možemo promotriti kao paralelni spoj dviju grana, koji je shematski prikazan na slici. Prva grana ima samo jedan kondenzator, druga dva u seriji zajedno s ostatkom sustava. No, kako je originalni sustav koji promatramo beskonačan, ostatak sustava iz druge grane mora biti identičan cijelom sustavu **(3 boda za uspješno korištenje simetrije za svođenje sustava na konačan sustav; razlog za pojednostavljivanje mora**

biti dobro argumentiran). Sada, koristeći se pravilima spajanja kondenzatora u seriju i paralelu **(1 bod za poznavanje pravila spajanja kondenzatora)**, možemo pisati za kapacitet dva kondenzatora C_2 u seriji

$$C_2 = \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C}} = \frac{C}{2}\,.$$

Promatrajući cijeli sustav, imamo **(1 bod za ispravno postavljenu jednadžbu za kapacitet.)**

$$C_{AB} = C + \frac{1}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_{AB}}}\,,$$

te dolazimo do kvadratne jednadžbe

$$C_{AB}^2 - CC_{AB} - \frac{C^2}{2} = 0\,,$$

biramo pozitivni korijen rješenja i tako dolazimo do traženog kapaciteta **(1 bod za točan i argumentirani odabir korijena kvadratne jednadžbe 1 bod za točan rezultat za kapacitet)**

$$C_{AB} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}C = 27.3205\,\mathrm{nF}\,.$$

(b) Opis gibanja loptice u ovom podzadatku može se drastično pojednostaviti ako primijetimo nekoliko stvari. Prvo, električno polje ubrzava lopticu samo u horizontalnom smjeru te je iznos tog ubrzanja neovisan o visini loptice. To znači da gibanje možemo rastaviti u dva neovisna gibanja, jedno u vertikalnom smjeru, drugo u horizontalnom. Gibanje u vertikalnom smjeru jednostavno je slobodan pad, dok je gibanje u horizontalnom smjeru jednoliko ubrzano u konstantnom električnom polju. Kada god loptica udari ploču, sustav se efektivno pretvori u zrcalnu kopiju samog sebe: loptica se giba u drugom smjeru s istim iznosima obiju komponenti brzine (zbog elastičnog sudara) te njezin naboj promijeni predznak. Za potrebe iznosa brzine i ubrzanja to je zapravo ekvivalentno sustavu u kojem loptica uopće ne udari u ploču, nego se nastavi gibati pod utjecajem istog polja kao i prije. Sveukupno, umjesto da razmatramo gibanje isprekidano odbijanjima od ploče, možemo samo proučavati horizontalni hitac s konstantnim ubrzanjem u horizontalnom smjeru bez početne brzine **(3 boda za uspješnu argumentaciju kako se gibanje loptice može pojednostaviti)**.

Sada moramo odrediti iznos tog ubrzanja i riješiti gibanje. Kapacitet planparalelnog kondenzatora je $C_p = \varepsilon\frac{l^2}{d} = 110.675$ pF, pri čemu je l duljina stranice ploče, a d njihova udaljenost **(1 bod za uspješno korištenje izraza za planparalelni kondenzator)**. Prilikom spajanja tog kondenzatora s nabijenim sustavom koji smo maloprije opisali, nema curenja naboja te će se potencijali morati izjednačiti. To znači da vrijedi **(1 bod za točan uvjet na konačni napon, 1 bod za uvjet s očuvanjem naboja)**

$$\frac{Q_{AB}}{C_{AB}} = U_{AB} = U_p = \frac{Q_p}{C_p}$$

$$Q_{uk} = Q_p + Q_{AB}\,,$$

rješavanjem ovog sustava dobivamo **(1 bod za točno rješenje sustava jednadžbi)**

$$Q_p = \frac{Q_{uk}}{1 + \frac{C_{AB}}{C_p}}\,.$$

Stoga je razlika potencijala između ploča planparelelnog kondenzatora jednaka

$$U_p = \frac{Q_p}{C_p} = \frac{Q_{uk}}{C_p + C_{AB}}\,.$$

Kako je električno polje homogeno, njegov se iznos može dobiti preko kvocijenta napona i udaljenosti ploča **(1 bod za točan razultat za električno polje)**

$$E_p = \frac{U_p}{d} = \frac{1}{d}\frac{Q_{uk}}{C_p + C_{AB}}\,.$$

Akceleracija u horizontalnom smjeru, koji ćemo označiti s x onda je **(1 bod za točan rezultat za akceleraciju.)**

$$a_x = \frac{qE_p}{m}\,,$$

pri čemu je q iznos naboja loptice, a m njezina masa. Kako je riječ o jednoliko ubraznom gibanju, brzina u tom smjeru ovisi o vremenu kao

$$v_x = \frac{qE_p}{m}t\,.$$

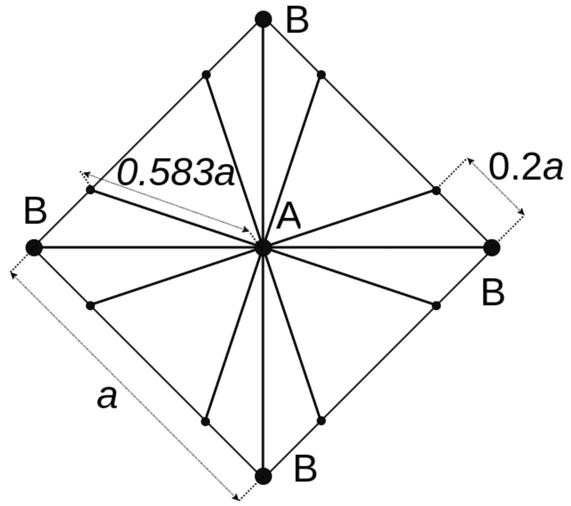
Vrijeme potrebno za pad loptice lako se dobije promatrajući slobodan pad **(1 bod uspješno rješavanje jednolikog ubrzanog gibanja. 1 bod za točan rezultat za vrijeme pada.)**

$$s = g\frac{t^2}{2} \quad \rightarrow \quad t_{\text{pad}} = \sqrt{2l/g} = 0.3193\,\text{s}\,.$$

Iznos brzine u tom je trenutku onda **(1 bod za ispravno baratanje vektorom brzine kako bi se dobio njegov iznos, 1 bod za točan konačan rezultat za iznos brzine)**

$$|\vec{v_{\text{kon}}}| = \sqrt{\left(gt_{\text{pad}}\right)^2 + \left(\frac{qE_p}{m}t_{\text{pad}}\right)^2} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{qE_p}{m}\right)^2}\cdot t_{\text{pad}} = 29.2682\,\text{m/s}\,.$$

Zadatak 3. (ukupno bodova: 19)



Promotrite sklop napravljen od cilindričnih otpornih žica identičnih radijusa u obliku kvadrata prikazanog shematski na slici. Sve su žice napravljene od posebnog kristala koji, kada se zagrijava, ima fazni prijelaz iz stanja visoke otpornosti u stanje niske otpornosti koja je 100 puta manja od otpornosti prije faznog prijelaza.

Istosmjerni naponski izvor spoji se s jednim svojim terminalom u točku A sklopa, dok se drugi terminal spoji paralelno na sve četiri točke B te se žice, čija je početna temperatura točno temperatura faznog prijelaza, počnu zagrijavati.

(a) Odredite ekvivalentni otpor tako spojenog strujnog kruga. Otpor žice u fazi visoke otpornosti čija duljina odgovara duljini stranice kvadrata je 1 om.

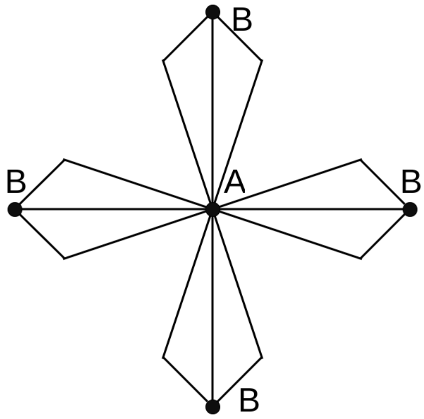
(b) Odredite ekvivalentni otpor nakon što prva skupina žica prođe kroz fazni prijelaz. Identificirajte sve žice koje su tada prošle kroz fazni prijelaz. Naputak: razmislite kako toplina koja se oslobađa u otpornoj žici ovisi o njezinoj duljini.

(c) Odredite omjer vremena koliko je potrebno da prva skupina žica prođe kroz fazni prijelaz te vremena potrebnog da druga skupina žica prođe kroz fazni prijelaz. Postoje li neke žice u ovom sklopu koje nikada neće proći kroz fazni prijelaz?

Pretpostavite da nema termalnog širenja, da se prilikom faznog prijelaza kristalu ne mijenjaju ni gustoća ni oblik te da otpor svih žica ostaje konstantan dok se u potpunosti ne dovrši fazni prijelaz. Uzmite da izvor nema unutarnji otpor. Zanemarite vođenje topline i sve toplinske gubitke u sustavu.

Napomena: u ovom zadatku žicom zovemo svaki individualni ravni segment između spojeva na shemi. Spojevi su na shemi označeni krugovima te se nalaze na račvanjima sklopa, što uključuje točke A i B. Sveukupno, dakle, sklop koji promatramo ima 24 žice i 13 spojeva. Spojevi ne unose dodatan otpor u strujni krug.

Rješenje:



(a) Promotrimo li sklop, možemo primijetiti da, zbog simetrije, struja nikada ne teče središnjim žicama na stranicama kvadrata jer se njihovi krajevi moraju nalaziti na istom potencijalu. Stoga, možemo samo promatrati ekvivalentnu shemu sa slike **(2 boda za ispravno korištenje simetrije kako bi se eliminirale žice kojima stuja ne teče)**. Dodatno, odmah možemo zaključiti i to da te 4 žice koje smo izbacili iz kruga neće nikada proći kroz fazni prijelaz **(1 bod točan zaključak za žice koje neće proći kroz fazni prijelaz)**.

Sada pak možemo pojednostavljeni sklop shvatiti kao 4 paralelna spoja od po jedne latice od kojih se svaka sastoji od po dvije žice duljine $0.2a$, dvije žice duljine $0.583a$ te jedne žice duljine polovine dijagonale $\sqrt{2}a/2$ **(1 bod za ispravnu interpretaciju pojednostavljene sheme sklopa preko paralelnog i serijskog spoja)**. Pri tome su žice na vanjskoj strani latice duljina $0.2a$ i $0.583a$ spojene serijski. Otpor latice je **(1 bod za poznavanje pravila spajanja otpornika, 1 bod za točan međurezultat za otpor podsklopa)**

$$R_L = \frac{R_a}{\frac{1}{0.2+0.583} + \frac{1}{0.2+0.583} + \frac{2}{\sqrt{2}}} = 0.2520 R_a\,,$$

pri čemu je R_a otpor žice duljine stranice a. Ukupni je otpor sklopa **(1 bod za točan rezultat za ekvivalentni otpor)**

$$R_{\text{uk}} = \frac{R_L}{4} = 0.0630 R_a = 0.0630\,\Omega\,.$$

(b) Kako se masa žica povećava linearno s duljinom, ukupna je latentna toplina potrebna da neka žica duljine l prođe kroz fazni prijelaz **(1 bod za ispravan zaključak o ovisnosti latentne topline o duljini žice)**

$$L_l = L_a \frac{l}{a}\,,$$

pri čemu je L_a latentna toplina potrebna da žica duljine a prođe kroz fazni prijelaz. Promotrimo li pojednostavljeni sklop još jednom, možemo primijetiti da se on sastoji od samo dva različita elementa: žica na rubu latice, duljina $0.2a$ i $0.583a$, koje možemo promatrati zajedno kao jednu žicu duljine $0.783a$, te žice u sredini duljina $\sqrt{2}a/2 \approx 0.7071a$ **(1 bod za uspješno razmatranje i grupiranje elemenata sklopa u grupe koje istovremeno moraju proći kroz fazni prijelaz)**. Ti elementi spajaju točke A i B te stoga pad napona na njima mora biti jednak naponu izvora U_i **(1 bod za točan rezultat za napon na žicama)**. Tako je snaga koja se na njima razvija jednaka **(1 bod za poznavanje snage, 1 bod za korištenje Ohmova zakona kako bi se iz ovisnosti eliminirala struja)**

$$P_l = UI = \frac{U^2}{R_l} = \frac{U_i^2 a}{R_a l}\,.$$

Uzmemo li u obzir da mora vrijediti i $L_l = P_l \Delta t$, slijedi **(1 bod za ispravno kombiniranje izraza kako bi se dobila ovisnost vremena faznog prijelaza o duljini)**

$$\Delta t = \frac{L_l}{P_l} = L_a \frac{l}{a} \frac{R_a l}{U_i^2 a} = \frac{R_a L_a}{U_i^2 a^2} l^2\,.$$

Prvi element koji prolazi kroz fazni prijelaz jest onaj kraći **(1 bod za točan i argumentiran zaključak koji elementi prvi imaju fazni prijelaz)**, odnosno žice u sredini latice te je vrijeme potrebno za to **(1 bod za točan rezultat za vrijeme)**

$$\Delta t_1 = \frac{L_{\sqrt{2}a/2}}{P_{\sqrt{2}a/2}} = \frac{1}{2}\frac{R_a L_a}{U_i^2}\,.$$

Nakon ovog faznog prijelaza otpor tih žica smanji se za faktor 100, tako da je ukupni otpor latice **(1 bod za točan međurezultat za otpor podsustava)**

$$R_L = \frac{R_a}{\frac{1}{0.2+0.583} + \frac{1}{0.2+0.583} + 100\frac{2}{\sqrt{2}}} = 0.0070 R_a\,,$$

pri čemu je R_a otpor žice duljine stranice a. Ukupni je otpor sklopa **(1 bod za točan rezultat za otpor nakon prvog faznog prijelaza)**

$$R_{\mathrm{uk},1} = \frac{R_{L,1}}{4} = \frac{1}{4}\frac{R_a}{\frac{1}{0.2+0.583} + \frac{1}{0.2+0.583} + 100\frac{2}{\sqrt{2}}} = 0.0017 R_a = 0.0017\,\Omega\,.$$

(c) Nakon što su žice u sredini latica prošle kroz fazni prijelaz, naša se analiza za drugi element (žice na rubu latica) ne mijenja **(1 bod za ispravan zaključak kako fazni prijelaz drugih žica ne mijenja račun)**, te je njihovo vrijeme potrebno za fazni prijelaz

$$\Delta t_2 = \frac{L_{0.783a}}{P_{0.783a}} = 0.6131\frac{R_a L_a}{U_i^2}\,.$$

Konačno, traženi je omjer **(1 bod za točan rezultat za omjer)**

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{1}{2\cdot 0.6131} = 0.8155\,.$$

Zadatak 4. (ukupno bodova: 13)

U zatvorenoj komori s klipom nalazi se 6 mola vodikovih molekula. U komoru se ubrizga 3 mola kisikovih molekula. Potom se pomicanjem klipa volumen komore smanjuje dok se plinska smjesa ne samozapali na temperaturi od 500 stupnjeva Celzijevih. Pretpostavite da tijekom ubrizgavanja plina i gibanja klipa nema izmjene topline s okolinom, da klip bez trenja klizi u horizontalnom smjeru unutar komore te da je klip za vrijeme gorenja i procesa nakon gorenja fiksiran.

(a) Odredite koja je konačna temperatura vode u komori nakon što sav vodik i kisik izgore.

(b) Nakon što je gorenje gotovo, sustavu se omogući izmjena topline s okolinom te se ovaj proces odvija dok se tlak u komori ne smanji 10 puta. Odredite konačnu temperaturu sustava, te koliko je vode u kojemu agregacijskom stanju.

Pretpostavite da se gorenje odvije trenutno, pri čemu se po dva atoma vodika i jedan atom kisika povežu kako bi stvorili jednu molekulu vode. U takvoj reakciji oslobađa se toplina te u tom sustavu možete pretpostaviti da gorenje oslobađa efektivno 2.858 kJ/mol topline (računato po molu molekula vodika), a tako oslobođena toplina povećava unutarnju energiju sustava. Uzmite da je sva novonastala voda u plinovitom stanju.

Zanemarite volumen u komori koji zauzima voda u tekućem stanju te pretpostavite da stanje tlaka u komori nema utjecaja na ukapljivanje vode. Uzmite da se svi plinovi mogu opisati kao idealni dvoatomni plinovi (uključujući i vodenu paru, gdje uzimamo da temperatura neće biti dovoljno visoka da pobudi dodatne stupnjeve slobode). Molekule vodika i imaju po dva vodikova atoma, kao i molekule kisika koje se sastoje od po dva atoma kisika.

Rješenje:

(a) U ovom procesu gorenja oslobađa se ukupno $Q_{uk} = \Delta q_{\text{gorenje}} n_{\text{vodik}}$ **(1 bod za točan zaključak o oslobođenoj toplini)** topline te konačnu temperaturu vodene pare dobijemo preko zakona očuvanja energije **(1 bod za ispravno korištenje Z.O.E., 1 bod za poznavanje unutarnje energije idealnog plina, 1 bod za točan rezultat za temperaturu)**

$$U_{\text{nakon izgaranja}} = U_{\text{poslije kompresije}} + Q_{uk}$$

$$T_{\text{nakon izgaranja}} = T_{\text{poslije kompresije}} \frac{n_{\text{vodik}} + n_{\text{kisik}}}{n_{\text{voda}}} + \frac{2}{5} \frac{\Delta q_{\text{gorenje}} n_{\text{vodik}}}{R n_{\text{voda}}}$$

$$T_{\text{nakon izgaranja}} = \frac{3}{2} T_{\text{poslije kompresije}} + \frac{2}{5} \frac{\Delta q_{\text{gorenje}}}{R} = 1297.2280\,\text{K}.$$

(b) U ovom procesu imamo izohornu promjenu pri kojoj se prvo smanjuju temperatura i tlak u sustavu, dok se temperatura ne snizi dovoljno da se voda počne ukapljivati **(1 bod za ispravno razlaganje procesa na dva sastavna procesa)**. Od tog trenutka temperatura ostaje konstantna, a toplina koju sustav oslobađa dolazi od latentne topline faznog prijelaza vode, dok smanjenje tlaka dolazi od smanjenog broja čestica u plinovitom stanju **(2 boda za u potpunosti ispravan i argumetniran zaključak o ponašanju sustava tijekom faznog prijelaza)**.

U izohornoj promjeni kvocijent tlaka i temperature je konstanta **(1 bod za poznavanje jednadžbe stanja idealnog plina ili ekvivalentnih plinskih zakona)** tako da do trenutka kada se voda počinje ukapljivati imamo **(1 bod za točan međurezultat za tlak, 1 bod za ispravan zaključak kako je**

ovdje dovoljno promatrati omjere tlaka kako bi se došlo do konačnog rezultata; bod dodijeliti čak i kada je to implicitno napravljeno, kao što je slučaj ovdje)

$$p_{\text{ukapljivanja}} = p_{\text{nakon izgaranja}} \frac{T_{\text{ukapljivanja}}}{T_{\text{nakon izgaranja}}} = 0.2877 p_{\text{nakon izgaranja}} \, .$$

Za vrijeme ukapljivanja, po naputku zadatka, volumen i temperatura plina ostaju konstantni, stoga kvocijent tlaka i količine tvari mora biti konstantan. Iz ovoga slijedi koliko je molova molekula plina preostalo **(1 bod za točan rezultat za količinu tvari vodene pare)**

$$n_{\text{para, konačno}} = n_{\text{para, početno}} \frac{p_{\text{konačno}}}{p_{\text{ukapljivanja}}} = (6\,\text{mol}) \frac{0.1 p_{\text{nakon izgaranja}}}{0.2877 p_{\text{nakon izgaranja}}} = 2.0859\,\text{mol}\, ,$$

dok je konačna količina tvari molekula ukapljene vode $n_{\text{tekuća voda, konačno}} = n_{\text{para, početno}} - n_{\text{para, konačno}} = 3.9141\,\text{mol}$ **(1 bod za točan rezultat za količinu tvari tekuće vode)**. Konačna temperatura sustava jest temperatura ukapljivanja vode, 373.15 K **(1 bod za točan rezultat za konačnu temperaturu)**.

Fizikalne konstante:

ubrzanje sile teže blizu površine Zemlje:

$g = 9.81 \mathrm{m/s}^2$

atmosferski tlak, odnosno tlak koji odgovara jednoj atmosferi:

$p_{\mathrm{atm}} = 1$ atm $= 101300$ Pa

temperatura apsolutne nule:

$T_0 = -273.15\ ^\circ\mathrm{C}$

plinska konstanta:

$R = 8.314$ J/Kmol

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2026.
Vodice, 12. – 15. svibnja 2026.
Eksperimentalni zadatak 2. skupina
Termodinamički rad i određivanje atmosferskog tlaka

Pribor:

- Injekcijska šprica $V = 2$ ml
- Čep za hermetičko zatvaranje šprice
- Dinamometar mjernog područja do 10 N
- Ravnalo, milimetarski papir

Zadani podaci za špricu:

- Ukupni nazivni volumen: $V = 2{,}0$ ml
- Duljina stupca zraka koji odgovara volumenu od 2 ml $\rightarrow h = 3{,}3$ cm

---

1. Geometrija i fizikalna osnova (6 bodova)

1.1. Na temelju zadanih podataka o šprici, izračunajte površinu poprečnog presjeka klipa S u m^2 bez korištenja ravnala. (**2 boda**)

1.2. Nacrtajte shematske prikaze svih vektora sila koje djeluju na klip šprice u trenutku kada ga dinamometrom polagano **izvlačite** i **uvlačite** iz hermetički zatvorene šprice (vakuum). (**2 boda**)

1.3. Objasnite zašto se mjerenje sila vrši isključivo pri stalnoj brzini gibanja klipa. (**2 boda**)

2. Određivanje atmosferskog tlaka p_{at} i sile trenja F_{tr} (8 bodova)

2.1. Potpuno istisnite zrak iz šprice i čvrsto je začepite prstom (provjerite jeste li dobro začepili otvor šprice povlačenjem klipa koji se mora vratiti u početni položaj kad ga pustite). Pomoću dinamometra odredite: Silu potrebnu za polagano **izvlačenje** klipa F_{izv} i silu potrebnu za polagano **uvlačenje** klipa F_{uvl} . Mjerenje ponoviti pet puta i napraviti račun pogreške. (**2 boda**)

Napomena: *silu izvlačenja i uvlačenja mjerite tijekom istog pokusa. Ne puštajte vanjski zrak u špricu, ona se sama mora vratiti u nulti položaj!*

2.2. Iz dobivenih vrijednosti izračunajte silu atmosferskog tlaka F_{at} i silu trenja F_{tr} (u N). Zapišite izraze koje ste koristili. (**2 boda**)

2.3. Izračunajte vrijednost lokalnog atmosferskog tlaka p_{at} (u Pa). (**2 boda**)

2.4. Komentirajte dobiveni rezultat za atmosferski tlak i eventualnu razliku s normiranim tlakom. (**2 boda**)

3. Analiza izotermnog procesa (8 bodova)

3.1. Otvorite špricu, postavite volumen zraka na $V_0 = 1$ ml i hermetički je začepite prstom. Povlačite klip šprice dinamometrom i očitajte ukupnu silu F pri polaganom izvlačenju za volumene: 1,2 ml; 1,4 ml; 1,6 ml; 1,8 ml i 2 ml. Mjerenje ponovite 5 puta. Rezultate srednjih vrijednosti zapišite u tablicu. (**3 boda**)

Savjet: *Svako od tih mjerenja izvesti tako da se ponovo vrati klip šprice u položaj od 1 ml.*

3.2. Za svaku točku izračunajte stvarni tlak plina p u unutrašnjosti šprice. Pri izračunu uvažite prethodno određeni p_{at} i silu trenja F_{tr}. Rezultate prikažite tablično. (**2 boda**)

3.3. Na milimetarskom papiru nacrtajte graf ovisnosti tlaka p o recipročnoj vrijednosti volumena ($1/V$). Prodiskutirajte u kojoj mjeri dobiveni rezultati prate Boyle-Mariotteov zakon. (**3 boda**)

4. Energetska bilanca (8 bodova)

4.1. Nacrtajte p, V graf i koristeći metodu zbroja trapeza (površina ispod p, V krivulje), odredite rad plina W_{plin} pri ekspanziji zraka od 1 ml do 2 ml. (**3 boda**)

4.2. Nacrtajte graf ovisnosti sile dinamometra F o pomaku klipa s. Grafičkom metodom (površina ispod krivulje) odredite rad vanjske sile W_v na putu klipa od 1 ml do 2 ml. (**3 boda**)

4.3. Usporedite zbroj rada plina i rada vanjske sile s radom atmosfere: $W_{pl} + W_v$ naspram W_{at}. Kratko obrazložite zašto ti radovi nisu jednaki i kamo je "nestala" razlika energije. (**2 boda**)

RJEŠENJE: Termodinamički rad i određivanje atmosferskog tlaka

---

1. Geometrija i fizikalna osnova

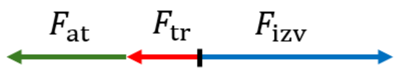
1.1. Površina poprečnog presjeka klipa:

Iz zadanih parametara šprice $V = 2\ \mathrm{ml} = 2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}$ i duljine $l = 33\ \mathrm{mm} = 0{,}033\ \mathrm{m}$:

$$S = \frac{V}{l} \approx 6{,}06 \cdot 10^{-5} m^2 \qquad \textbf{(2 boda)}$$

1.2. Shematski prikaz sila:

Pri izvlačenju:



Pri uvlačenju:

(**2 boda**)

Na klip djeluju tri ključne sile: sila atmosfere F_{at}, sila trenja F_{tr} i vanjska sila dinamometra F.

- **Pri izvlačenju:** $F_{\mathrm{izv}} = F_{\mathrm{at}} + F_{\mathrm{tr}}$ (ruka svladava tlak i otpor klipa).
- **Pri uvlačenju:** $F_{\mathrm{uvl}} = F_{\mathrm{at}} - F_{\mathrm{tr}}$ (atmosfera gura klip, ruka ga koči, trenje se protivi gibanju).

1.3. Stalna brzina gibanja:

Pri stalnoj brzini nema akceleracije $a = 0$, što znači da je prema Prvom Newtonovom zakonu rezultantna sila nula. To nam omogućuje da izmjerene vrijednosti sila na dinamometru smatramo jednakima silama u statičkom sustavu. (**2 boda**)

---

2. Određivanje atmosferskog tlaka p_{at} i sile trenja F_{tr}

2.1. Srednje vrijednosti izmjerenih sila:

Iz izmjerenih vrijednosti, srednje sile iznose: $\overline{F_{izv}} = 7$ N i $\overline{F_{uvl}} = 5$ N

Očekivana relativna pogreška je od 2 % do 6 %. (**2 boda**)

Napomena: Različite šprice mogu dovesti do drugačijih rezultata.

2.2. Izračun sila:

- **Sila atmosferskog tlaka:** $F_{\mathrm{at}} = \frac{F_{\mathrm{izv}} + F_{\mathrm{uvl}}}{2} = \frac{7+5}{2} = 6\ \mathrm{N}$
- **Sila trenja:** $F_{\mathrm{tr}} = \frac{F_{\mathrm{izv}} - F_{\mathrm{uvl}}}{2} = \frac{7-5}{2} = 1\ \mathrm{N}$ (**2 boda**)

2.3. Izračun lokalnog atmosferskog tlaka:

$$p_{at} = \frac{F_{at}}{S} = \frac{6\ \mathrm{N}}{6{,}06 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^2} \approx 99010\ \mathrm{Pa} \qquad \textbf{(2 boda)}$$

2.4. Komentar na dobiveni rezultat atmosferskog tlaka:

Glavni razlog dobivanja nižeg tlaka od normiranog je **zaostali zrak u kljunu šprice (mrtvi prostor)**. Taj se zrak pri rastezanju šprice širi i stvara unutarnji tlak koji djeluje u smjeru izvlačenja klipa. Zbog toga je potrebna manja sila dinamometra nego u slučaju savršenog vakuuma, što u konačnom izračunu rezultira prividno manjom vrijednošću atmosferskog tlaka. (**2 boda**)

---

3. Analiza izotermnog procesa

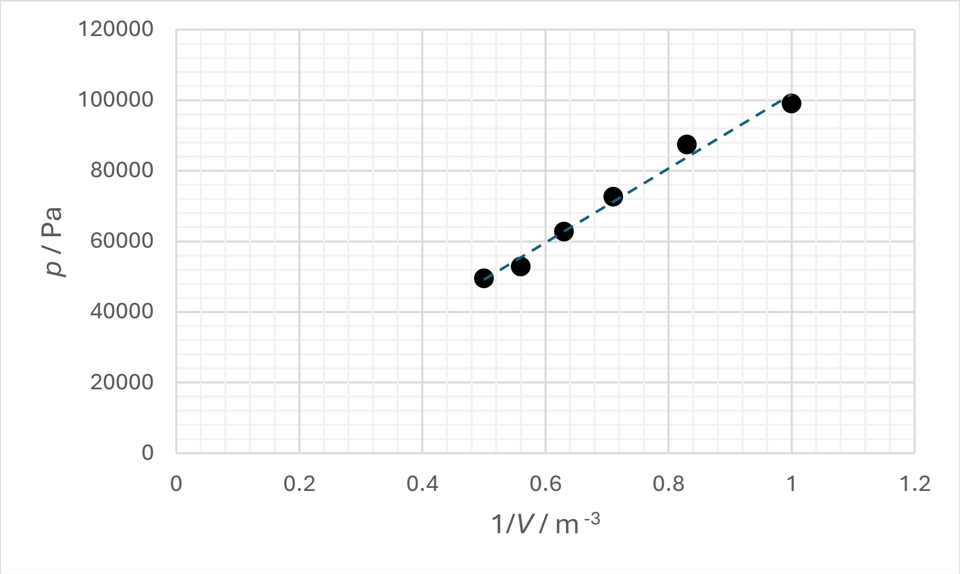
3.1. i 3.2. Tablica srednjih vrijednosti sila izračuna tlaka plina *p*:

Tlak plina unutar šprice pri rastezanju računamo kao razliku: $p = p_{\mathrm{at}} - \frac{F - F_{\mathrm{tr}}}{S}$.

***V* / ml**	***F* / N**	***p* / Pa**	$\frac{1}{V}$ **/ml^{-1}**
1,0	0	**99010**	1
1,2	1,7	**87 459**	0,83
1,4	2,6	**72 607**	0,71
1,6	3,2	**62 706**	0,63
1,8	3,8	**52 805**	0,56
2,0	4,0	**49 505**	0,50

(**3 boda**) (**2 boda**)

3.3. Graf ovisnosti tlaka *p* o recipročnoj vrijednosti volumena (1/*V*)



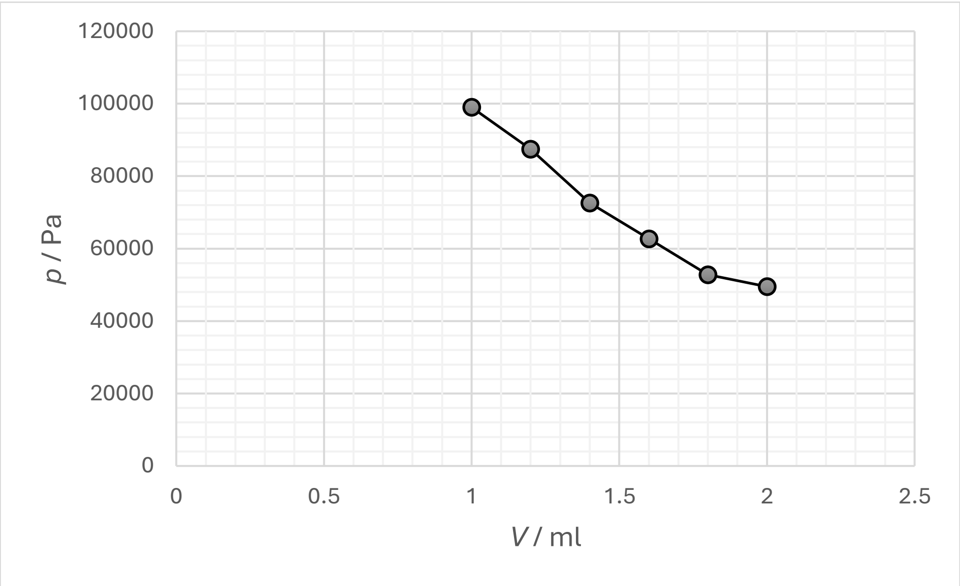
3.4. Boyle-Mariotteov zakon:

Graf ovisnosti p o $1/V$ pokazuje linearnu ovisnost, što potvrđuje izotermnost procesa. Umnožak $p \cdot V$ blago varira zbog "mrtvog prostora" u kljunu šprice koji nismo uključili u nazivni volumen. **(3 boda)**

---

4. Energetska bilanca

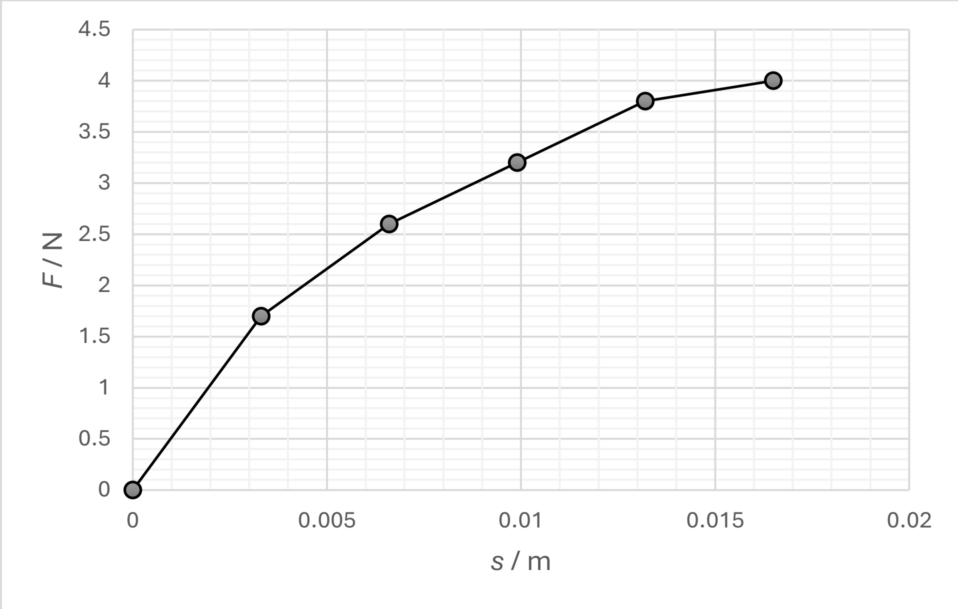
4.1. Rad plina W_{pl}:



Zbrajanjem površina trapeza ispod p,V krivulje za sve intervale od 1,0 do 2,0 ml:

$$W_{\mathrm{pl}} = \sum p_{\mathrm{sr}} \cdot \Delta V \approx 0{,}070\ \mathrm{J} \quad \textbf{(3 boda)}$$

4.2. Rad vanjske sile W_v:



Zbrajanjem rada sile na prijeđenom putu klipa:

$$W_\mathrm{v} = \sum F_\mathrm{sr} \cdot \Delta s \approx 0{,}044 \text{ J} \quad \textbf{(3 boda)}$$

4.3. Energetska bilanca

Rad koji obavlja atmosfera pri pomaku klipa od 1 ml do 2 ml računa se preko stalne sile atmosfere (F_at) koju smo odredili u točki 2.1. i ukupnog puta klipa.

- Sila atmosfere: $F_\mathrm{at} = 6$ N
- Ukupni pomak: $s_\mathrm{ukupno} = 0{,}0165$ m

$$W_{at} = F_{at} \cdot s_{ukupno} = 6 \text{ N} \cdot 0{,}0165 \text{ m} = 0{,}099 \text{ J}$$

Zbrojimo rad koji je izvršio plin iznutra (W_pl, izračunat u 4.1.) i rad koji je izvršila vanjska sila (dinamometar) povlačenjem izvana (W_v, izračunat u 4.2. preko površine ispod grafa):

- Rad plina: $W_{pl} \approx 0{,}070$ J
- Rad vanjske sile: $W_v \approx 0{,}044$ J

$$W_{uloženo} = W_{pl} + W_v = 0{,}070 \text{ J} + 0{,}044 \text{ J} = 0{,}114 \text{ J}$$

Usporedbom vidimo da je ukupni uloženi rad (0,114 J) veći od rada potrebnog za svladavanje atmosferskog tlaka (0,099 J). Razlika iznosi:

$$\Delta W = W_{uloženo} - W_{at} = 0{,}114 \text{ J} - 0{,}099 \text{ J} = 0{,}015 \text{ J}$$

Objašnjenje: Ukupni uloženi rad ruke i plina (0,114 J) veći je od rada potrebnog za svladavanje vanjske atmosfere (0,099 J). Ta razlika od **0,015 J** predstavlja rad koji je utrošen na svladavanje **sile trenja** između klipa i šprice. Ta se energija pretvorila u toplinu, što je u skladu sa zakonom očuvanja energije. (**2 boda**)

Državno natjecanje iz fizike 2025./2026.

Vodice, 12. – 15. svibnja 2026.

Srednje škole – 3. skupina

VAŽNO: Tijekom ispita učenici ne smiju imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule i dr.). Za pisanje treba se koristiti kemijskom olovkom ili nalivperom. Učenici pri ruci ne smiju imati mobitel ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

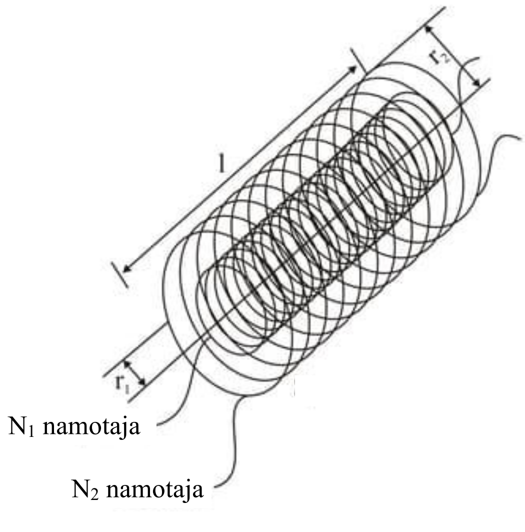
1. zadatak (16 bodova)

Dva idealna solenoida duljine 2 metra nalaze se koncentrično jedan u drugome (koaksijalno – vidi sliku). Vanjski je solenoid polumjera 10 cm i sastoji se od 400 namotaja po metru duljine. Unutarnji je solenoid polumjera 5 cm i sastoji se od 600 namotaja po metru duljine. Dva solenoida spojena su serijski. Zanemarite rubne efekte i magnetsko polje izvan solenoida.

a) Odredite induktivitet svakog solenoida pojedinačno.

b) Odredite ukupni induktivitet dvaju solenoida ako se magnetski tokovi međusobno pojačavaju.

c) Ako kroz solenoide teče struja 10 A, odredite inducirani elektromotorni napon na krajevima dvaju serijski spojenih koaksijalnih solenoida ako je struja prestala teći nakon 10 ms pri isključenju sklopke. Struja se pri tome linearno smanjuje. Struja u oba solenoida teče u istom smjeru.



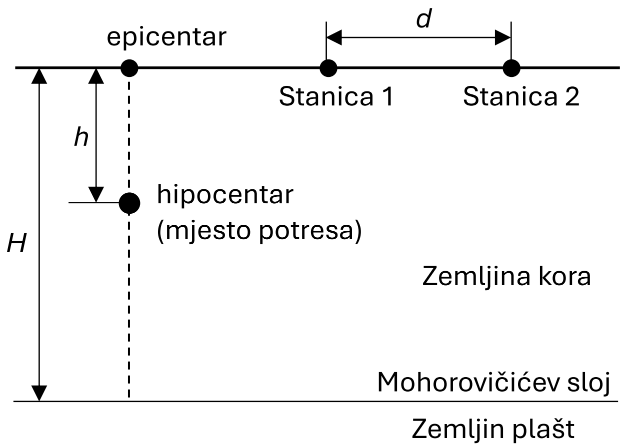
2. zadatak (19 bodova)

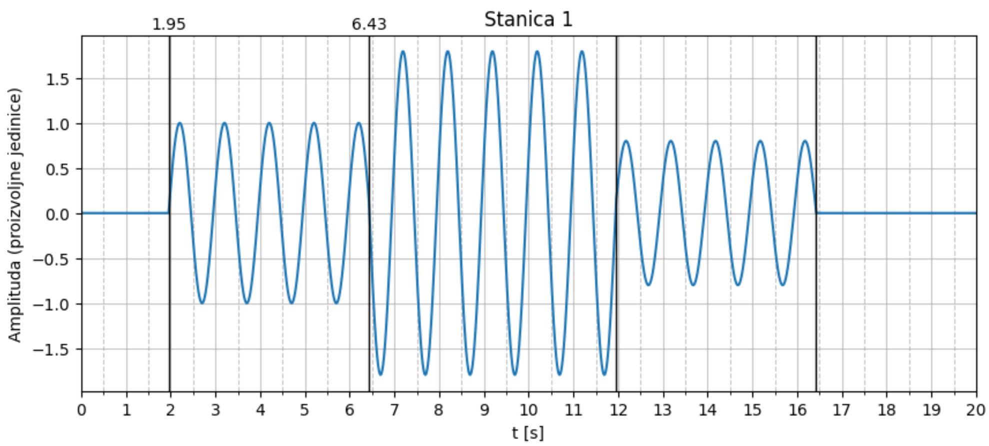
Geofizičari seizmolozi opazili su potresne valove u seizmološkim stanicama 1 i 2 (vidi slike) uzrokovane potresom na nepoznatoj dubini *h* s obzirom na površinu Zemlje. Pretpostavite da je potres nastao u jednoj točki (hipocentar) u unutrašnjosti Zemlje i da se širi u svim smjerovima u obliku ravnih harmonijskih potresnih valova. Točka na površini Zemlje koja je najmanje udaljena od hipocentra (mjesta nastanka potresa) naziva se epicentar. Obje seizmološke stanice nalaze se na istom pravcu koji prolazi kroz epicentar. Međusobna udaljenost dviju seizmoloških stanica iznosi d = 8 km. Seizmolozi su izmjerili valnu duljinu potresnih valova od 8 km. Valovi se šire kroz Zemljinu koru homogene gustoće, bez gubitaka i prigušenja sve dok ne dosegnu površinu Zemlje. Na dnu kore nalazi se Mohorovičićev sloj, granica ispod koje se nalazi Zemljin plašt čija je gustoća mnogo veća od Zemljine kore. Mjerenja prikazana na slikama započinju u trenutku potresa (t = 0).

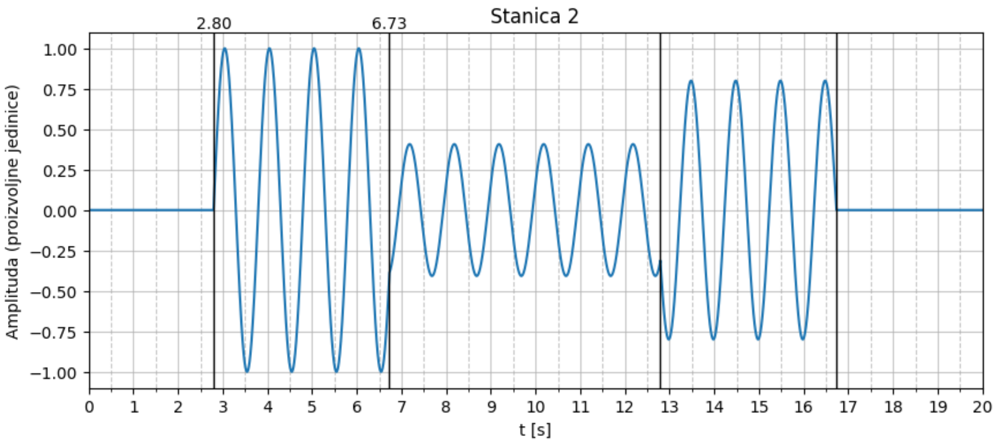
a) Odredite dubinu *h* potresa, trajanje potresa i dubinu *H* Mohorovičićeva sloja.

b) Odredite udaljenost seizmoloških postaja 1 i 2 od epicentra potresa.

c) Odredite koliki je dio energije vala apsorbiran u Mohorovičićevu sloju pri refleksiji.







Napomena: Vertikalnim punim linijama označeni su trenutci promjene oblika vala na slikama, s pripadnim vremenima na vrhu grafova.

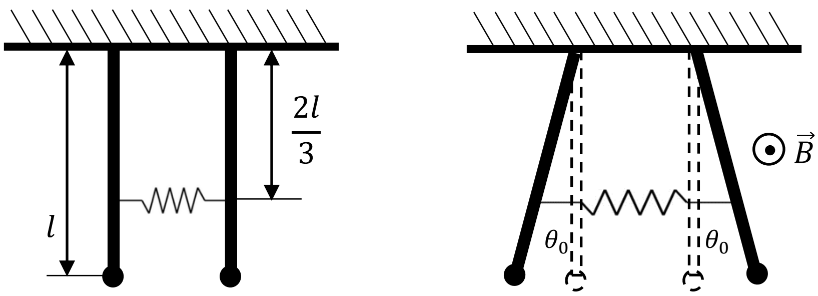
3. zadatak (19 bodova)

Dva jednaka vodljiva štapa duljine l = 40 cm i mase m = 300 g svaki, obješena su svaki na svoje ovjesište i međusobno spojeni vodljivom ravnom nerastegnutom oprugom koeficijenta elastičnosti k = 90 N/m. Krajevi opruge pričvršćeni su za štap na udaljenosti 2/3 duljine štapa od ovjesišta. Na kraju svakog štapa pričvršćen je mali uteg zanemarivih dimenzija i mase M = 500 g.

a) Odredite period njihanja štapova ako oba štapa istovremeno otklonimo za mali kut θ_0 od ravnotežnog položaja tako da rastegnemo oprugu u oba smjera (vidi sliku), te pustimo da titra. Zanemarite debljinu štapova i opruge, masu opruge i otpor zraka. Pretpostavite male otklone za koje vrijedi (kut θ mjeri se u radijanima):

$$\sin\theta \approx \theta; \quad \cos\theta \approx 1$$

b) Ako se ovakvo njihalo nalazi u magnetskom polju B = 1 T okomitom na ravninu njihala, a vrhove vodljivih štapova u ovjesištu spojimo horizontalnom vodljivom žicom, odredite najveću induciranu struju u štapu ako je ukupni otpor zatvorenog strujnog kruga 2 Ω, a štapove smo maksimalno otklonili za θ_0 = 10°. Pretpostavite da je inducirana struja preslaba da utječe na gibanje sustava.



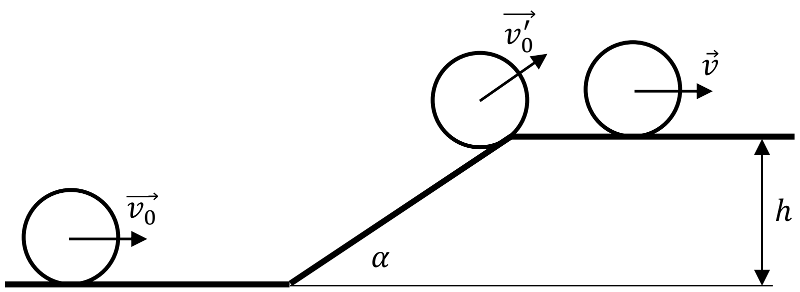
4. zadatak (16 bodova)

Homogeni puni valjak mase m = 100 g i radijusa R = 20 cm kotrlja se bez proklizavanja uz kosinu nagnutu za α = 30° u odnosu na horizontalnu ravninu. Kosina je visoka h = 50 cm (vidi sliku).

a) Koliko iznosi minimalna početna brzina v_0 koju valjak mora imati da bi se popeo do vrha kosine?

b) Koliko iznosi maksimalna početna brzina v_0 koju valjak smije imati, a da još uvijek ne poskoči na vrhu kosine?

c) Koliko iznosi maksimalna brzinu v'_0 koju valjak smije imati neposredno prije nego što se poravna s horizontalnom podlogom vrha kosine, a da još uvijek ne poskoči?



Fizikalne konstante:

g = 9.81 m/s^2

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m = $1.257 \cdot 10^{-6}$ H/m

Moment tromosti štapa mase m, duljine l i zanemarive debljine pri rotaciji oko jednog od krajeva štapa:

$$I = \frac{1}{3}ml^2$$

Moment tromosti točke mase m pri rotaciji oko osi udaljene za r od mase:

$$I = mr^2$$

Moment tromosti homogenog punog valjka mase m i polumjera R pri rotaciji oko glavne (središnje) osi:

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

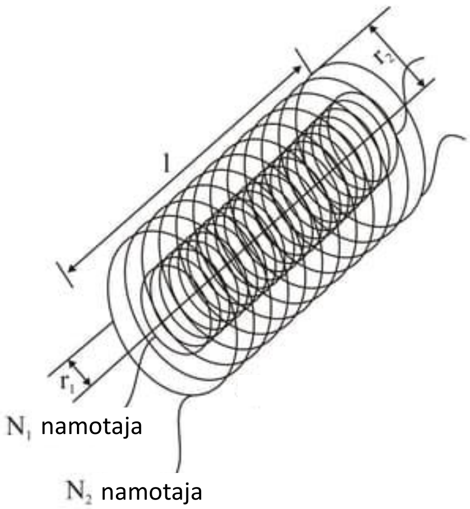
3. SKUPINA ZADATAKA

ŠKOLSKA GODINA 2025./2026.

Zadatak 1. (16 bodova)

Dva idealna solenoida duljine 2 metra nalaze se koncentrično jedan u drugome (koaksijalno – vidi sliku). Vanjski je solenoid polumjera 10 cm i sastoji se od 400 namotaja po metru duljine. Unutarnji je solenoid polumjera 5 cm i sastoji se od 600 namotaja po metru duljine. Dva solenoida spojena su serijski. Zanemarite rubne efekte i magnetsko polje izvan solenoida.

a) Odredite induktivitet svakog solenoida pojedinačno.
b) Odredite ukupni induktivitet dvaju solenoida ako se magnetski tokovi međusobno pojačavaju.
c) Ako kroz solenoide teče struja 10 A, odredite inducirani elektromotorni napon na krajevima dvaju serijski spojenih koaksijalnih solenoida ako je struja prestala teći nakon 10 ms pri isključenju sklopke. Struja se pri tome linearno smanjuje. Struja u oba solenoida teče u istom smjeru.



Rješenje:

Označimo vanjski solenoid indeksom ‘2’, a unutarnji solenoid indeksom ‘1’. Broj namotaja N solenoida možemo odrediti iz broja namotaja n po jedinici duljine i duljine solenoida l kao:

$$n = \frac{N}{l} \quad \rightarrow \quad N = n \cdot l$$ 1 bod

a) Induktivitet vanjskog solenoida iznosi:

$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2 A_2}{l} = \mu_0 \frac{n_2^2 \cdot l^2 \cdot r_2^2 \pi}{l} = \mu_0 \cdot n_2^2 \cdot l \cdot r_2^2 \pi = 1.263 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{H} = 12.63\ \mathrm{mH}$$ 1 bod

gdje je $A_2 = r_2^2 \pi$ površina poprečnog (kružnog) presjeka vanjskog solenoida polumjera r_2. Analogno dobijemo i za unutarnji solenoid:

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2 A_1}{l} = \mu_0 \frac{n_1^2 \cdot l^2 \cdot r_1^2 \pi}{l} = \mu_0 \cdot n_1^2 \cdot l \cdot r_1^2 \pi = 7.106 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{H} = 7.106\ \mathrm{mH}$$ 1 bod

NAPOMENA: Ako učenik ne zna izraz za induktivitet solenoida, može ga izvesti, ali to mu se ne boduje:
Tok magnetskog polja kroz zatvorenu petlju proporcionalan je struji kroz petlju, s faktorom proporcionalnosti jednakim induktivitetu:

$$\Phi = L \cdot I$$

Magnetski tok kroz površinu presjeka A solenoida s N namotaja i magnetskim poljem B iznosi:

$$\Phi = NBA$$

Magnetsko polje u unutrašnjosti solenoida duljine l s N namotaja koje nastaje protokom struje I kroz solenoid:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

Iskoristimo sve tri jednadžbe:

$$LI = N \cdot \mu_0 \frac{NI}{l} \cdot A$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}$$

b) Za određivanje ukupnog induktiviteta potrebno je primijetiti da su dva solenoida spojena serijski, pa se njihov induktivitet zbraja, ali treba još odrediti i međuinduktivitet kao posljedicu promjene magnetskog polja unutar vanjskog solenoida zbog utjecaja unutarnjeg, i obrnuto.
Serijski spoj dvaju solenoida daje serijski induktivitet L_s:

$$L_s = L_1 + L_2$$ 1 bod

Potrebno je još dodati međuinduktivitete M_{12} i M_{21} međudjelovanja dviju zavojnica: ili

$$L_{uk} = L_s + M_{12} + M_{21} = L_1 + L_2 + M_{12} + M_{21}$$ 2 boda

NAPOMENA: Ako učenik ne uzme u obzir međuinduktivitet, treba bodovati samo relaciju za serijski spoj L_s

Prolaskom struje I_2 kroz vanjski solenoid (2), stvara se magnetsko polje i magnetski tok Φ_1 kroz unutarnji solenoid (1), s međuinduktivitetom M_{12} solenoida 1 u odnosu na solenoid 2:

$$\Phi_1 = M_{12} \cdot I_2$$ 1 bod

Magnetski tok kroz unutarnji solenoid (1) zbog magnetskog polja vanjskog solenoida (2) iznosi:

$$\Phi_1 = N_1 B_2 A_1$$ 1 bod

dok je magnetsko polje B_2 uslijed struje I_2 u vanjskom solenoidu (2) jednako:

$$B_2 = \mu_0 \frac{N_2 I_2}{l}$$ 1 bod

Kombinacijom triju gornjih jednadžbi dobijemo:

$$M_{12} \cdot I_2 = N_1 B_2 A_1 = N_1 \cdot \mu_0 \frac{N_2 I_2}{l} \cdot A_1$$

Konačno za međuindukciju dobijemo:

$$M_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A_1}{l} = \mu_0 \frac{n_1 l \cdot n_2 l \cdot r_1^2 \pi}{l} = \mu_0 n_1 n_2 l \cdot r_1^2 \pi$$ 1 bod

Analogno moramo još izračunati utjecaj unutarnjeg solenoida (1) na vanjski solenoid (2) kroz međuinduktivitet M_{21}. Moguće je vidjeti da se svi indeksi zamjenjuju, osim površine A_1 kroz koju unutarnji solenoid stvara magnetsko polje i utječe na vanjski solenoid jer pretpostavljamo da je magnetsko polje izvan unutarnjeg solenoida jednako nuli. 1 bod

Dakle, prolaskom struje I_1 kroz unutarnji solenoid (1) stvara se magnetsko polje i magnetski tok Φ_2 kroz vanjski solenoid (2), s međuinduktivitetom M_{21} solenoida 2 u odnosu na solenoid 1:

$$\Phi_2 = M_{21} \cdot I_1$$

Magnetski tok kroz vanjski solenoid (2), zbog magnetskog polja unutarnjeg solenoida (1), ograničen je samo na poprečni presjek A_1 unutarnjeg solenoida i iznosi:

$$\Phi_2 = N_2 B_1 A_1$$ 1 bod

dok je magnetsko polje B_1 uslijed struje I_1 u unutarnjem solenoidu (1) jednako:

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l}$$

Kombinacijom triju gornjih jednadžbe dobijemo:

$$M_{21} \cdot I_1 = N_2 B_1 A_1 = N_2 \cdot \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l} \cdot A_1$$

Konačno, za međuindukciju dobijemo:

$$M_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A_1}{l} = M_{12}$$ 2 boda

Sada možemo izračunati ukupni induktivitet:

$$L_{uk} = L_s + 2M_{12} = L_1 + L_2 + 2M_{12}$$

$$L_{uk} = 12.63 \text{ mH} + 7.106 \text{ mH} + 9.475 \text{ mH} = 29.211 \text{ mH}$$ 1 bod

c) Promjena struje u vremenu iznosi:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{10}{0.01} \text{ As}^{-1} = 1000 \text{ As}^{-1}$$ 1 bod

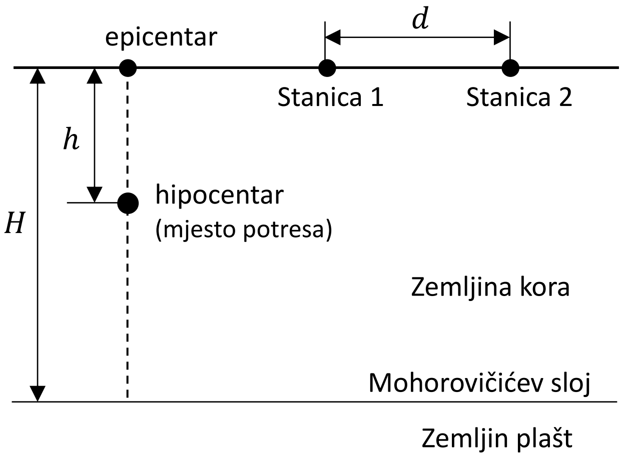
Inducirani elektromotorni napon na krajevima obaju solenoida u serijskom spoju iznosi (zanemarimo predznak):

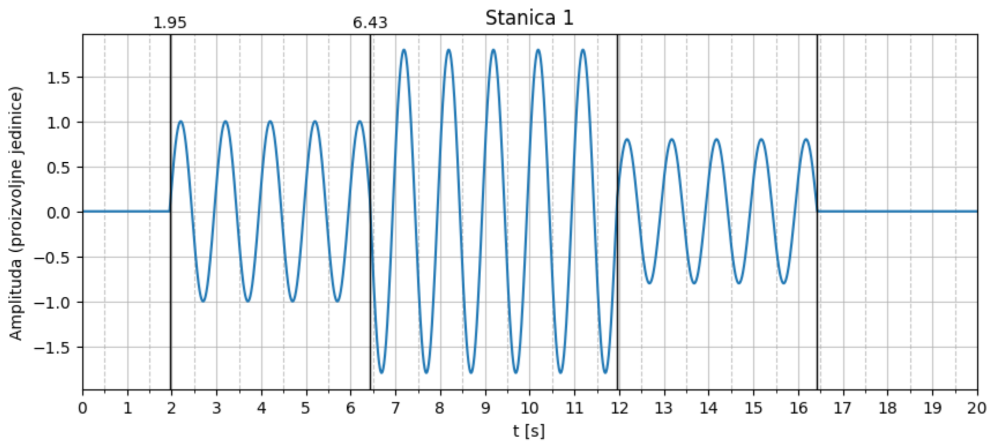
$$\mathcal{E} = L_{uk} \frac{\Delta I}{\Delta t} = 29.21 \text{ V}$$ 1 bod

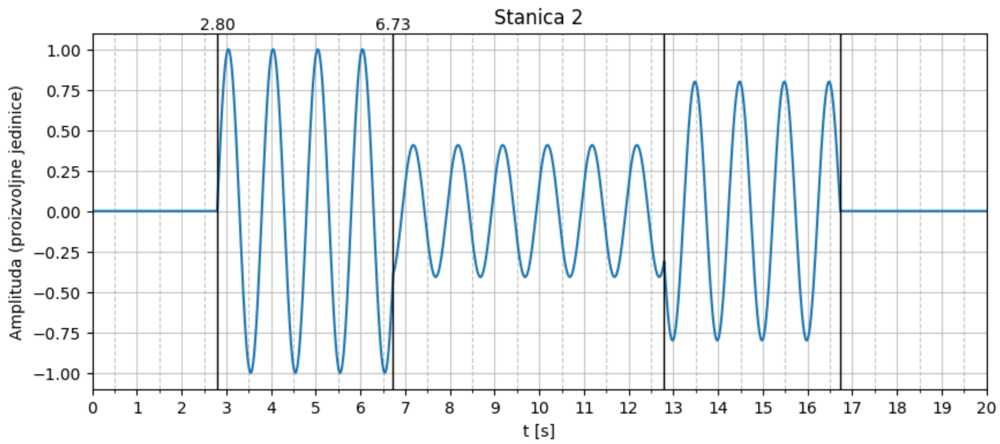
Zadatak 2. (19 bodova)

Geofizičari seizmolozi opazili su potresne valove u seizmološkim stanicama 1 i 2 (vidi slike) uzrokovane potresom na nepoznatoj dubini *h* s obzirom na površinu Zemlje. Pretpostavite da je potres nastao u jednoj točki (hipocentar) u unutrašnjosti Zemlje i da se širi u svim smjerovima u obliku ravnih harmonijskih potresnih valova. Točka na površini Zemlje koja je najmanje udaljena od hipocentra (mjesta nastanka potresa) naziva se epicentar. Obje seizmološke stanice nalaze se na istom pravcu koji prolazi kroz epicentar. Međusobna udaljenost dviju seizmoloških stanica iznosi $d = 8$ km. Seizmolozi su izmjerili valnu duljinu potresnih valova od 8 km. Valovi se šire kroz Zemljinu koru homogene gustoće, bez gubitaka i prigušenja, sve dok ne dosegnu površinu Zemlje. Na dnu kore nalazi se Mohorovičićev sloj, granica ispod koje se nalazi Zemljin plašt čija je gustoća mnogo veća od Zemljine kore. Mjerenja prikazana na slikama započinju u trenutku potresa ($t = 0$).

a) Odredite dubinu *h* potresa, trajanje potresa i dubinu *H* Mohorovičićeva sloja.
b) Odredite udaljenost seizmoloških postaja 1 i 2 od epicentra potresa.
c) Odredite koliki je dio energije vala apsorbiran u Mohorovičićevu sloju pri refleksiji.







Napomena: Vertikalnim punim linijama označeni su trenutci promjene oblika vala na slikama, s pripadnim vremenima na vrhu grafova.

Rješenje:
Iz izvora potresa (hipocentar) u svim se smjerovima širi ravni harmonijski potresni val amplitude u_0 i oblika:

$$u(t) = u_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r\right)$$

Kružna frekvencija iznosi:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Period vala možemo očitati sa slike:

$$T = 1\ \mathrm{s}$$ 0.5 bod

Amplitudu direktnog vala također možemo očitati sa slike (proizvoljne jedinice):

$$u_0 = 1$$ 0.5 bod

Brzina širenja potresnih valova iznosi:

$$v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} = 8\ \mathrm{km/s}$$ 1 bod

a) i b)

S obzirom da Zemljina kora ima mnogo veću gustoću od Zemljina plašta, na granici kore i plašta (Mohorovičićev diskontinuitet) doći će do refleksije potresnog vala. Na površini Zemlje, u stanicama 1 i 2 imat ćemo interferenciju direktnog i reflektiranog vala. Reflektirani val također će promijeniti fazu za π.

Poznavanjem trenutka dolaska direktnog vala (t_{d1} i t_{d2}) u stanice 1 i 2 (očitamo s grafova), možemo odrediti udaljenost stanica 1 i 2 do hipocentra, pri čemu su x_1i x_2 udaljenosti stanica 1 i 2 od epicentra:

$$(vt_{d1})^2 = h^2 + x_1^2$$
$$(vt_{d2})^2 = h^2 + x_2^2$$ 2 boda

S grafova možemo očitati i trenutak (t_{r1} i t_{r2}) dolaska reflektiranog vala, pri čemu dolazi do interferencije i promjene oblika sinusoidalnog vala. Primijetimo da je početak reflektiranog vala u protufazi (smanjuje amplitudu direktnog vala).

Prema zakonu refleksije, upadni i izlazni kutovi smjera vala jednaki su u slučaju stanice 1, pa možemo val 1 'reflektirati' s obzirom na granicu (vidi donju sliku):

$$(vt_{r1})^2 = (h + H - h + H - h)^2 + x_1^2$$
$$(vt_{r1})^2 = (2H - h)^2 + x_1^2$$ 2 boda

Analogno za stanicu 2:

$$(vt_{r2})^2 = (2H - h)^2 + x_2^2$$

Iz direktnih valova možemo odrediti x_1, x_2 i h:

$$(vt_{d1})^2 = h^2 + x_1^2$$
$$(vt_{d2})^2 = h^2 + x_2^2$$
$$x_2 = x_1 + d$$ 1 bod

Oduzmimo i zamijenimo x_2:

$$v^2(t_{d1}^2 - t_{d2}^2) = x_1^2 - (x_1 + d)^2$$
$$v^2(t_{d2}^2 - t_{d1}^2) = 2x_1 d + d^2$$

$$x_1 = \frac{v^2(t_{d2}^2 - t_{d1}^2) - d^2}{2d}$$

S grafa očitamo vrijeme dolaska direktnog vala u stanicu 1 i 2:

$$t_{d1} = 1.95 \text{ s}$$
$$t_{d2} = 2.80 \text{ s}$$ 1 bod

Uvrstimo i dobijemo:

$$x_1 = 12.15 \text{ km}$$
$$x_2 = x_1 + d = 20.15 \text{ km}$$ 1 bod

Dubina potresa:

$$h^2 = (vt_{d1})^2 - x_1^2$$
$$h = 9.785 \text{ km}$$ 1 bod

Iz reflektiranog vala:

$$(vt_{r1})^2 = (2H - h)^2 + x_1^2$$

Odredimo H:

$$2H - h = \sqrt{(vt_{r1})^2 - x_1^2}$$
$$H = \frac{1}{2}\left(h + \sqrt{(vt_{r1})^2 - x_1^2}\right)$$ 1 bod

Očitamo vremena t_{r1} i t_{r2} dolaska reflektiranog vala:

$$t_{r1} = 6.43 \text{ s}$$
$$t_{r2} = 6.73 \text{ s}$$ 1 bod

Dobijemo:

$$H = 29.885 \text{ km}$$ 1 bod

Sa slike se može odrediti da potres traje 10 sekundi. 2 boda

c)

Sa slike je vidljivo da je amplituda direktnog potresnog vala:

$$u_{d0} = 1$$

Nakon što reflektirani val pristigne u seizmološku stanicu, amplituda se mijenja ovisno o relativnoj fazi između dvaju valova, no na kraju grafičkog prikaza direktni val nestaje i preostaje samo reflektirani val. Amplituda reflektiranog vala prema slici iznosi:

$$u_{r0} = 0.8$$ 1 bod

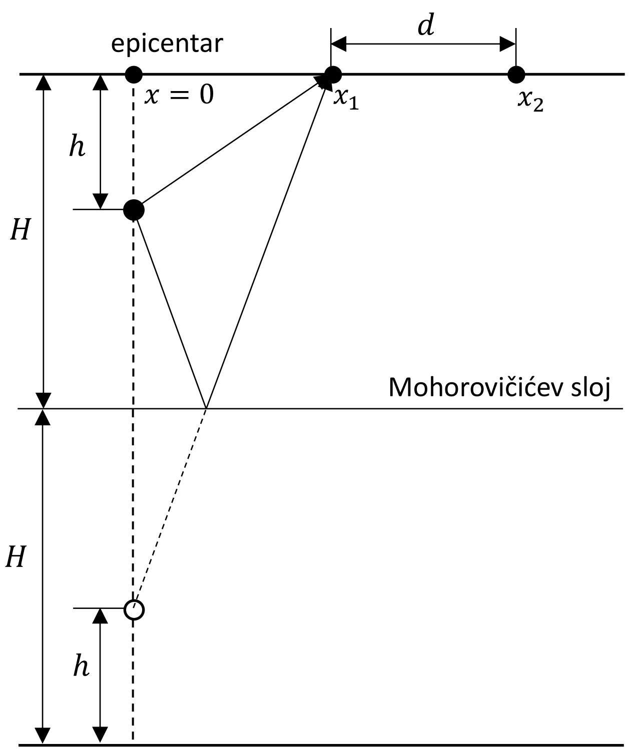
Energija vala proporcionalna je kvadratu amplitude vala, pa je energija reflektiranog vala u odnosu na energiju direktnog vala:

$$\frac{E_r}{E_d} = \left(\frac{u_{r0}}{u_{d0}}\right)^2 = 0.64$$ 2 boda

Mohorovičićev je sloj prema tome apsorbirao

$$\frac{E_d - E_r}{E_d} = 1 - \frac{E_r}{E_d} = 0.36$$
$$\Delta E = E_d - E_r = 0.36\, E_d$$ 1 bod

energije direktnog vala.



epicentar
d
$x = 0$
x_1
x_2
h
H
Mohorovičićev sloj
H
h

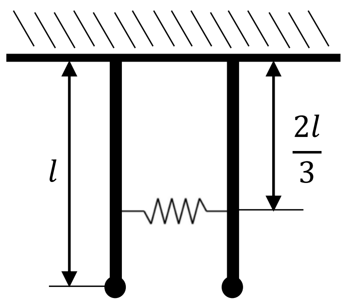
Zadatak 3. (19 bodova)

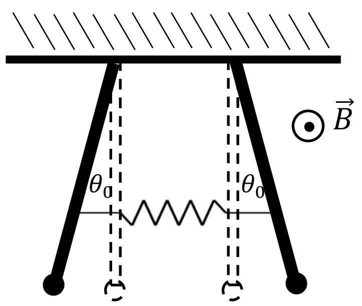
Dva jednaka vodljiva štapa duljine $l = 40\ \mathrm{cm}$ i mase $m = 300\ \mathrm{g}$ svaki, obješena su svaki na svoje ovjesište i međusobno spojeni vodljivom ravnom nerastegnutom oprugom koeficijenta elastičnosti $k = 90\ \mathrm{N/m}$. Krajevi opruge pričvršćeni su za štap na udaljenosti 2/3 duljine štapa od ovjesišta. Na kraju svakog štapa pričvršćen je mali uteg zanemarivih dimenzija i mase $M = 500\ \mathrm{g}$.

a) Odredite period njihanja štapova ako oba štapa istovremeno otklonimo za mali kut θ_0 od ravnotežnog položaja tako da rastegnemo oprugu u oba smjera (vidi sliku) te pustimo da titra. Zanemarite debljinu štapova i opruge, masu opruge i otpor zraka. Pretpostavite male otklone za koje vrijedi (kut θ mjeri se u radijanima):

$$\sin\theta \approx \theta;\ \ \cos\theta \approx 1$$

b) Ako se ovakvo njihalo nalazi u magnetskom polju $B = 1\ \mathrm{T}$ okomitom na ravninu njihala, a vrhove vodljivih štapova u ovjesištu spojimo horizontalnom vodljivom žicom, odredite najveću induciranu struju u štapu ako je ukupni otpor zatvorenog strujnog kruga $2\ \Omega$, a štapove smo maksimalno otklonili za $\theta_0 = 10°$. Pretpostavite da je inducirana struja preslaba da utječe na gibanje sustava.





Rješenje:

a) Pomaknimo štapove za neki kut θ od ravnotežnog položaja. Ucrtajmo sve sile koje djeluju na štap (vidi sliku):

1. Sila teža u središtu štapa:

$$G_m = mg \qquad \text{0.5 boda}$$

2. Sila teža u središtu utega:

$$G_M = Mg \qquad \text{0.5 boda}$$

3. Elastična sila opruge koja se rastegnula ukupno za Δx (zanemarujemo predznak):

$$F_{el} = k\Delta x \qquad \text{0.5 boda}$$

Opruga se jednako rasteže pri pomaku lijevog, ali i pri pomaku desnog štapa. Ukupni je pomak jednak:

$$\Delta x = 2 \cdot \frac{2}{3} l \cdot \sin\theta \approx 2 \cdot \frac{2}{3} l \cdot \theta$$

Elastična sila sada iznosi:

$$F_{el} = \frac{4}{3} kl\theta \qquad \text{1 bod}$$

Odredimo momente sila koji uzrokuju gibanje, odnosno rotaciju štapa i utega oko ovjesišta:

1. Moment sile teže štapa:

$$M_m = mg\sin\theta \cdot \frac{l}{2} \approx \frac{mgl}{2}\theta$$ 1 bod

2. Moment sile teže utega:

$$M_M = Mg\sin\theta \cdot l \approx Mgl\theta$$ 1 bod

3. Moment sile elastičnosti:

$$M_{el} = \frac{4}{3}kl\theta\cos\theta \cdot \frac{2}{3}l \approx \frac{4}{3}kl\theta \cdot \frac{2}{3}l = \frac{8}{9}kl^2\theta$$ 1 bod

Svi momenti zakreću desni štap u smjeru kazaljke na satu, pa je ukupni moment:

$$M = M_m + M_M + M_{el} = \frac{mgl}{2}\theta + Mgl\theta + \frac{8}{9}kl^2\theta$$

$$M = \left[gl\left(\frac{m}{2} + M\right) + \frac{8}{9}kl^2\right]\theta$$ 1 bod

Jednadžba gibanja:

$$M = I\alpha$$

gdje je I ukupni moment inercije štapa i utega, a α je kružno ubrzanje štapa oko ovjesišta. Konačno:

$$I\alpha = \left[gl\left(\frac{m}{2} + M\right) + \frac{8}{9}kl^2\right]\theta$$ 1 bod

Ovo je jednadžba harmonijskog oscilatora oblika:

$$\alpha = \omega^2\theta$$

Kružna frekvencija stoga je:

$$\omega^2 = \frac{gl\left(\frac{m}{2} + M\right) + \frac{8}{9}kl^2}{I}$$

Period iznosi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{gl\left(\frac{m}{2} + M\right) + \frac{8}{9}kl^2}}$$ 2 boda

Moment inercije štapa pri rotaciji oko jednog njegova kraja iznosi:

$$I_š = \frac{1}{3}ml^2$$

Moment inercije utega kao točkaste mase (bez dimenzija) oko ovjesišta na udaljenosti l iznosi:

$$I_u = Ml^2$$

Ukupni moment inercije:

$$I = I_š + I_u = \frac{1}{3}ml^2 + Ml^2 = \left(\frac{m}{3} + M\right)l^2$$ 2 boda

Period je konačno:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m}{3} + M}{\frac{g}{l}\left(\frac{m}{2} + M\right) + \frac{8}{9}k}}$$ 1 bod

$$T = 0.497\ \mathrm{s}$$

b) Ako je $\theta = 0°$ u ravnotežnom položaju, u početnom trenutku štapove smo otklonili za:

$$\theta(t=0) = \theta_0$$

Štapovi se harmonijski njišu s pomakom u fazi $\varphi = \frac{\pi}{2}$, pa su im položaji i kružne brzine:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \theta_0 \cos \omega t$$

$$v_\theta(t) = \omega\theta_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega\theta_0 \sin \omega t$$ 1 bod

Štap postiže maksimalnu brzinu kada prolazi kroz ravnotežni položaj:

$$v_{\theta\max} = \omega\theta_0$$ 1 bod

U kratkom vremenu Δt oko ravnotežnog položaja površina petlje će se smanjiti/povećati za kružni isječak kojega prebriše 2/3 duljine štapa (jer se tu nalazi električni spoj preko opruge), a u tom kratkom vremenu možemo uzeti da je kružna brzina konstantna. U vremenu Δt štap prevali kut $\Delta\theta$:

$$v_{\theta\max} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$ 0.5 boda

Prebrisana površina kružnog isječka iznosi:

$$\frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{\Delta S}{\left(\frac{2l}{3}\right)^2 \pi}$$

Tražena površina kružnog isječka iznosi:

$$\Delta S = \left(\frac{2l}{3}\right)^2 \pi \cdot \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{2}{9} l^2 v_{\theta\max} \cdot \Delta t$$ 1 bod

Inducirani napon iznosi:

$$|U_i| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Magnetsko se polje ne mijenja, pa je promjena magnetskog toka:

$$\Delta\Phi = \mathrm{B} \cdot 2\Delta\mathrm{S}$$ 1 bod

jer se površina petlje mijenja gibanjem obaju štapova.

Konačno za maksimalni inducirani napon dobijemo:

$$|U_{i\max}| = \frac{\mathrm{B} \cdot 2\Delta\mathrm{S}}{\Delta t} = \frac{2B}{\Delta t} \cdot \frac{2}{9} l^2 v_{\theta\max} \cdot \Delta t$$

$$|U_{i\max}| = \frac{4}{9} B l^2 v_{\theta\max} = \frac{4}{9} B l^2 \theta_0 \cdot \frac{2\pi}{T}$$

$$|U_{i\max}| = \frac{8\pi B l^2 \theta_0}{9T}$$ 1 bod

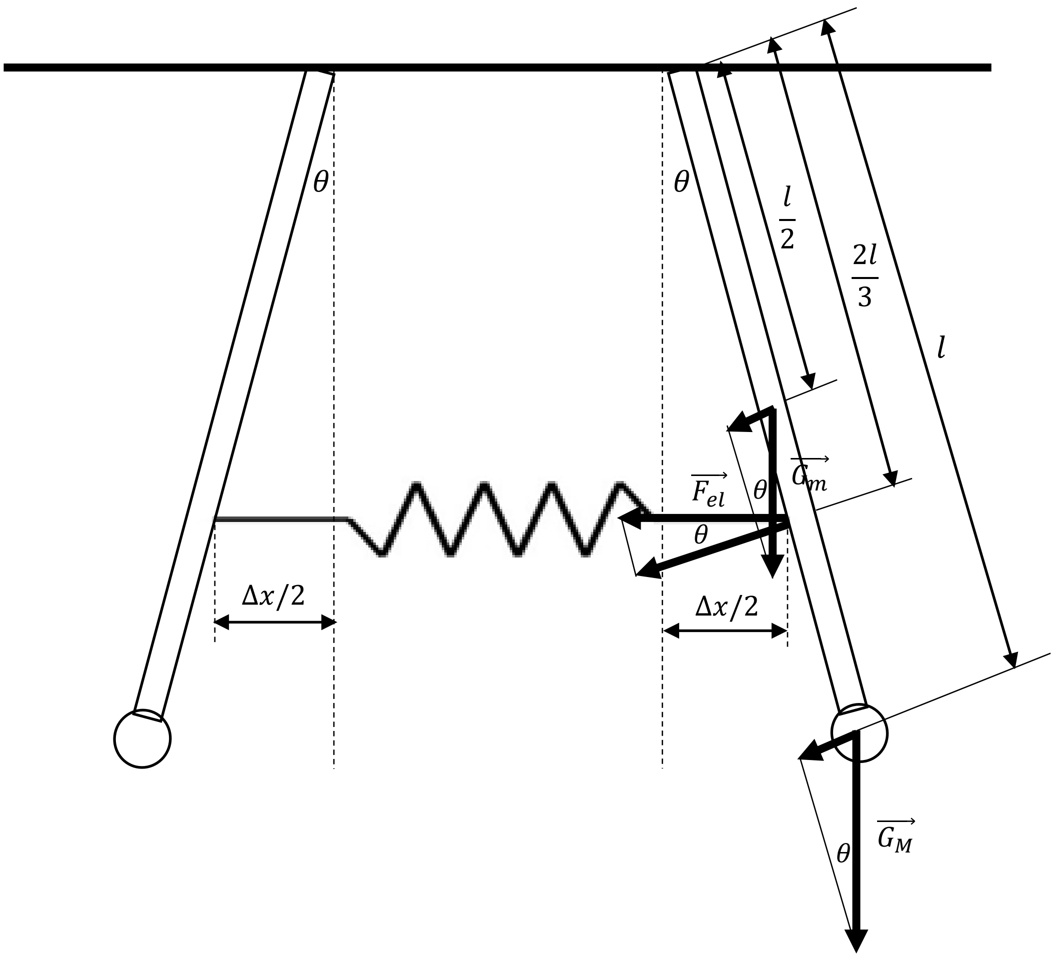
Maksimalno inducirana struja je:

$$I_{i\max} = \frac{|U_{i\max}|}{R} = \frac{8\pi B l^2 \theta_0}{9TR}$$

Ako računamo kut θ_0 u stupnjevima:

$$I_{i\max} = \frac{8\pi^2 B l^2 \theta_0}{9TR \cdot 180}$$

$$I_{i\max} = 0.07845\ \mathrm{A}$$ 1 bod



θ
θ
l/2
2l/3
l
F_el
G_m
θ
θ
Δx/2
Δx/2
θ
G_M

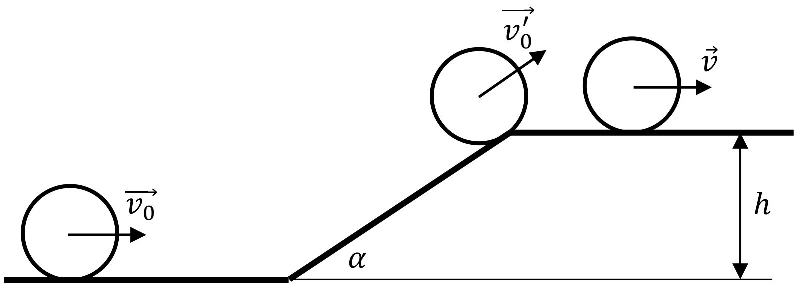
Zadatak 4. (16 bodova)

Homogeni puni valjak mase $m = 100\ \mathrm{g}$ i radijusa $R = 20\ \mathrm{cm}$ kotrlja se bez proklizavanja uz kosinu nagnutu za $\alpha = 30°$ u odnosu na horizontalnu ravninu. Kosina je visoka $h = 50\ \mathrm{cm}$ (vidi sliku).

a) Koliko iznosi minimalna početna brzina v_0 koju valjak mora imati da bi se popeo do vrha kosine?

b) Koliko iznosi maksimalna početna brzina v_0 koju valjak smije imati, a da još uvijek ne poskoči na vrhu kosine?

c) Koliko iznosi maksimalna brzina v_0' koju valjak smije imati neposredno prije nego što se poravna s horizontalnom podlogom vrha kosine, a da još uvijek ne poskoči?



Rješenje:

a) Minimalnu početnu brzinu v_0 potrebnu da se valjak polumjera R kotrljanjem uspne na vrh kosine visine h odredimo iz zakona očuvanja energije. Na dnu kosine valjak ima:

1. rotacijsku kinetičku energiju:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{v_0}{R}\right)^2$$ 1 bod

2. translacijsku kinetičku energiju:

$$\frac{1}{2}mv_0^2$$ 0.5 boda

Na vrhu kosine, valjak miruje i posjeduje samo gravitacijsku potencijalnu energiju:

$$mgh$$ 0.5 boda

Zakon očuvanja energije:

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$$ 1 bod

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$$

$$\frac{1}{4}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$$

Minimalna početna brzina valjka da bi se popeo na vrh kosine

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

$$v_0 = 2.557\ \mathrm{m/s}$$ 1 bod

c) Valjak na vrhu kosine mora poravnati svoje težište i smjer gibanja, koje je paralelno s pravcem kosine (položaj 1 na donjoj slici) u smjeru pravca horizontalne ravnine (položaj 2 na donjoj slici), što znači da će mu se smjer gibanja promijeniti. Valjak izvodi kružno gibanje oko točke O na vrhu kosine (vidi sliku). Primijetite da se težište valjka u položaju 2 pri završetku kružnog gibanja valjka oko točke O mora podići u odnosu na težište valjka u položaju 1 na početku kružnog gibanja. Iz tog će razloga brzina v_0' biti veća i različita od brzine v, pa će se i centripetalna sila mijenjati. 1 bod

Valjak neće poskočiti ako je sila pritiska na podlogu tijekom rotacije valjka oko točke O uvijek jednaka ili veća od nule. Pri tome je dovoljno promatrati valjak u položaju 1 jer je tada brzina najveća. Centripetalna sila u tom je slučaju: 1 bod

$$mg\cos\alpha - N = \frac{m{v_0'}^2}{R}$$

$${v_0'}^2 = gR\cos\alpha - \frac{NR}{m}$$

2 boda

Do odskakivanja neće doći kada je $N \geq 0$, odnosno ako je brzina valjka u položaju 1: 1 bod

$$v_0' \leq \sqrt{gR\cos\alpha}$$

$$v_0' \leq 1.304\ \mathrm{m/s}$$

1 bod

NAPOMENA:

Ako promatramo položaj 2 na kraju rotacije na vrhu kosine, kada je smjer gibanja valjka poravnat sa smjerom horizontalne ravnine, centripetalna sila iznosit će:

$$mg - N = \frac{mv^2}{R}$$

$$v^2 = gR - \frac{NR}{m}$$

Pritisak na podlogu bit će veći ili jednak nuli $N \geq 0$ (valjak se neće odvojiti od podloge) ako je brzina valjka na vrhu kosine

$$v \leq \sqrt{gR}$$

Možemo izračunati brzinu v_0' u tom slučaju (označimo je s $v_0'(2)$) te pokazati da je ta brzina prevelika da bi valjak ostao u kontaktu s podlogom u položaju 1, zbog čega će valjak poskočiti.

Prilikom promjene smjera gibanja valjka iz smjera kosine u smjer horizontalne ravnine, težište valjka promijeni se i povisi za (vidi sliku):

$$\Delta h = R(1 - \cos\alpha)$$

Brzina valjka nakon poravnanja sa smjerom horizontalne ravnine mora se smanjiti u odnosu na brzinu dok je smjer gibanja valjka paralelan sa smjerom kosine kako bi se težište podiglo za Δh.

Zakon očuvanja energije:

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{v_0'}{R}\right)^2+\frac{1}{2}mv_0'^2=mg\Delta h+\frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2+\frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{3}{4}mv_0'^2=mg\Delta h+\frac{3}{4}mv^2$$

$$\frac{3}{4}v_0'^2=gR(1-\cos\alpha)+\frac{3}{4}v^2$$

Konačno, brzina v_0' i brzina v na vrhu kosine povezani su kao:

$$v_0'^2=\frac{4}{3}gR(1-\cos\alpha)+v^2$$

Ako vrijedi da je brzina na vrhu kosine:

$$v\leq\sqrt{gR}$$

konačno dobijemo za brzinu v_0':

$$v_0'^2\leq\frac{4}{3}gR(1-\cos\alpha)+gR$$

$$v_0'\leq\sqrt{\frac{gR(7-4\cos\alpha)}{3}}$$

$$v_0'(2)\leq 1.521\ \mathrm{m/s}$$

Vidimo da su granične vrijednosti brzina $v_0'(2)>{v_0}'$, pa će stoga doći do poskakivanja valjka između položaja 1 i 2 ako je $1.304\ \mathrm{m/s}<{v_0}'\leq 1.521\ \mathrm{m/s}$, te je dovoljno promatrati položaj 1, a do poskakivanja neće doći ako je brzina

$$v_0'\leq 1.304\ \mathrm{m/s}$$

b) Prilikom promjene smjera gibanja valjka iz smjera kosine u smjer horizontalne ravnine, težište valjka promijeni se iz položaja 1 u 2 i povisi za (vidi sliku):

$$\Delta h=R(1-\cos\alpha)$$

iz čega je vidljivo da se valjak u položaju 1 s brzinom v_0' podignuo za visinu $h-\Delta h$ s obzirom na valjak na dnu kosine s traženom brzinom v_0. 1 bod

Iz zakona očuvanja energije odredimo najveću početnu brzinu v_0 za uvjet brzine v_0' pri kojemu nema poskakivanja valjka:

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{v_0}{R}\right)^2+\frac{1}{2}mv_0^2=mg(h-\Delta h)+\frac{1}{2}I\left(\frac{v_0'}{R}\right)^2+\frac{1}{2}m{v_0'}^2$$ 2 boda

$$\frac{1}{4}mv_0^2+\frac{1}{2}mv_0^2=mg(h-\Delta h)+\frac{1}{4}m{v_0'}^2+\frac{1}{2}m{v_0'}^2$$

$$\frac{3}{4}v_0^2=g(h-\Delta h)+\frac{3}{4}{v_0'}^2$$

$$v_0^2={v_0'}^2+\frac{4}{3}g(h-\Delta h)$$

$$v_0=\sqrt{{v_0'}^2+\frac{4}{3}g(h-R(1-\cos\alpha))}$$ 1 bod

Uvjet prema kojemu nema poskakivanja valjka:

$$v_0' \leq \sqrt{gR\cos\alpha}$$

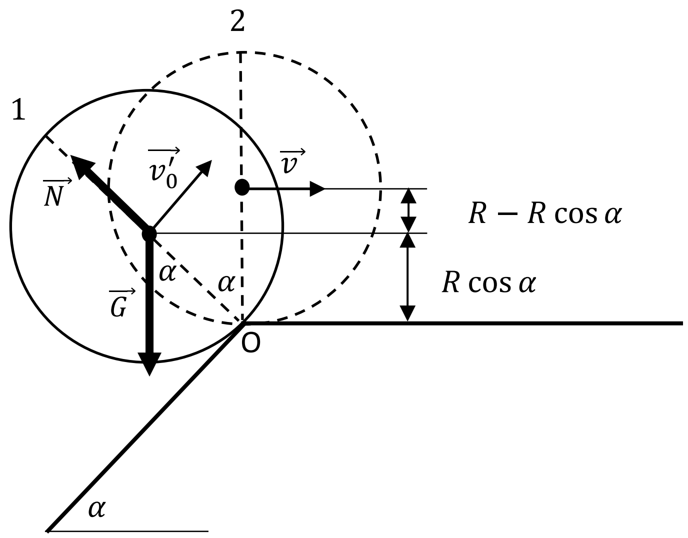
1 bod

$$v_0 \leq \sqrt{gR\cos\alpha + \frac{4}{3}g(h - R(1-\cos\alpha))}$$

$$v_0 \leq \sqrt{\frac{g}{3}(7R\cos\alpha + 4h - 4R)}$$

$$v_0 \leq 2.809 \text{ m/s}$$

1 bod



Konstante:
$g = 9.81 \text{ ms}^{-1}$
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{Hm}^{-1} = 1.257 \cdot 10^{-6} \text{ Hm}^{-1}$

Moment tromosti štapa mase m, duljine l i zanemarive debljine pri rotaciji oko jednog od krajeva štapa:
$I = \frac{1}{3}ml^2$

Moment tromosti točke mase m pri rotaciji oko osi udaljene za r od točke:
$I = mr^2$

Moment tromosti homogenog punog valjka mase m i polumjera R pri rotaciji oko glavne (središnje) osi:
$I = \frac{1}{2}mR^2$

Državno natjecanje iz fizike

12. do 15. svibnja 2026., Vodice

EKSPERIMENTALNI ZADATAK

3. skupina

Rattleback ili keltski kamen jest kruto tijelo nepravilnog oblika koje pri vrtnji na vodoravnoj podlozi pokazuje različito ponašanje ovisno o smjeru vrtnje.
Prije rješavanja zadataka upoznajte se s njegovim gibanjem.
Postavite *rattleback* na vodoravnu plastičnu podlogu. Uhvatite ga u srednjem dijelu palcem i kažiprstom te ga zakrenite tako da se zavrti. Promatrajte njegovo gibanje, a zatim ponovite postupak u suprotnom smjeru vrtnje.
Pokušajte ga pokrenuti i laganim potiskivanjem prstom na jednom od njegovih krajeva ili blagim pritiskom na kraj. Obratite pozornost na smjer u kojemu se pritom počinje vrtjeti.
Ponovite pokretanje *rattlebacka* i na stolu.

Pribor: Drvena letva s kukicama, 2 plastična krokodilska stegača, drvena letva, konac, škare, samoljepljivi jastučići ili selotejp, plastični pladanj, plastični *rattleback*, kutomjer, olovka i/ili flomaster, mjerna traka, vaga, zaporni sat, čaša s vodom, papirnati ubrus, nekoliko drvenih šibica za označavanje položaja *rattlebacka*, plastična žlica bez drške.

1. zadatak

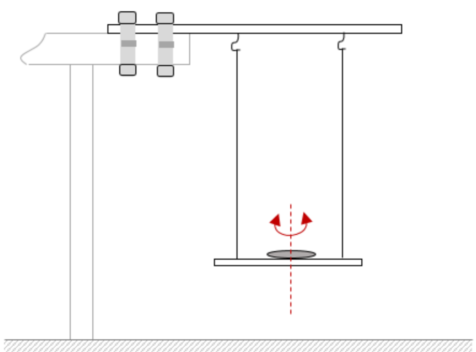
a) Opiši ponašanje *rattlebacka* pri vrtnji u oba smjera. **2 boda**

b) Tijekom gibanja *rattleback* može izvoditi više različitih vrsta gibanja. **3 boda**
Na temelju opažanja
- opiši uočena gibanja
- izdvoji tri međusobno okomite osi oko kojih se *rattleback* može gibati i prikaži ih skicom
- za svaku os navedi kakvo gibanje oko nje nastaje.

c) Koja je od tih osi približno vertikalna tijekom vrtnje *rattlebacka*? **1 bod**

2. zadatak

Osnova eksperimentalnog postava prikazana je na slici:



Rattleback treba postaviti u učvrstiti tako da se njegov centar mase nalazi na osi rotacije.

Za male kutove zakreta za period titranja bifilarnog njihala T dan je izrazom:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4Il}{mgd^2}},$$

gdje je I moment tromosti ovješenog sustava oko osi titranja, m masa ovješenog sustava, l duljina niti, d razmak između niti, g ubrzanje slobodnog pada (9,81 m s^{-2}).

a) Opiši eksperimentalni postupak kojim pomoću bifilarnog njihala možeš odrediti moment tromosti *rattlebacka* oko dviju od triju osi koje si opisao u 1. zadatku. **3 boda**

b) Obrazloži koje si dvije osi odabrao/la za mjerenje. Što možeš zaključiti o preostaloj trećoj osi? **2 boda**

c) Skicom prikaži položaje *rattlebacka* na letvici za oba mjerenja. Na svakoj skici označi odabranu os, os titranja sustava i položaj centra mase *rattlebacka*. **2 boda**

d) Provedi mjerenja potrebna za realizaciju predloženog postupka. Mjerenja prikaži tablično. **2 boda**

e) Obradi rezultate i odredi momente tromosti *rattlebacka*. **3 boda**

f) Usporedi dobivene momente tromosti *rattlebacka* i komentiraj što ta razlika govori o raspodjeli mase *rattlebacka*. **1 bod**

g) Procijeni nesigurnost rezultata i navedi najmanje četiri glavna izvora pogreške. **1 bod**

3. zadatak

a) *Rattleback* postavljen na plastičnu podlogu, zavrti u smjeru u kojem dolazi do promjene smjera vrtnje.

Napravi tri serije mjerenja:

- vremena trajanja povratne vrtnje,
- kuta povratne vrtnje.

Povratnom vrtnjom smatra se vrtnja nakon što se *rattleback* zaustavi i počne vrtjeti u suprotnom smjeru, sve do konačnog zaustavljanja. Povratni kut je kut za koji se *rattleback* zakrene tijekom povratne vrtnje.

Kut procijeni s točnošću od približno 5°.

Zasebno napravi tri serije mjerenja ukupnog trajanja gibanja *rattlebacka*, od početka vrtnje do konačnog zaustavljanja.

Iz dobivenih mjerenja procijeni vrijeme od početka gibanja do trenutka kada se *rattleback* prvi put zaustavi i počne mijenjati smjer vrtnje.

Procijeni omjer trajanja povratne vrtnje i vremena do promjene smjera.

Usporedi dobivena vremena i kutove te komentiraj kako se gibanje mijenja tijekom vremena.

Promijeni uvjete trenja između *rattlebacka* i podloge te usporedi rezultate. **3 boda**

b) Na temelju mjerenja opiši kako se tijekom gibanja mijenja energija sustava te objasni ulogu trenja. **2 boda**

c) Koristeći se rezultatima iz 1. i 2. zadatka objasni:

- zašto se pri vrtnji u jednom smjeru jače pobuđuje njihanje nego pri vrtnji u suprotnom smjeru,
- zašto dolazi do promjene smjera vrtnje *rattlebacka*. **2 boda**

d) Pomoću samoljepljivih jastučića modificiraj plastičnu žlicu bez drške tako da pri vrtnji pokazuje promjenu smjera vrtnje (kontrarotaciju).

- Realiziraj barem dva različita rasporeda dodane mase.
- Za svaki raspored isprobaj oba početna smjera vrtnje.
- Opažanjem i jednostavnim mjerenjima procijeni izraženost kontrarotacije. Pritom možeš koristiti, primjerice, povratni kut, trajanje povratne vrtnje ili omjer $\omega = \frac{\varphi}{t}$, gdje je φ povratni kut, a *t* vrijeme trajanja povratne vrtnje.
- Skiciraj rasporede dodane mase.
- Usporedi rezultate i raspravi kako položaj, raspodjela i ukupni iznos dodane mase utječu na pojavu kontrarotacije.
- Objasni zašto neki rasporedi mase mogu dovesti do izraženije kontrarotacije za jedan početni smjer vrtnje nego za suprotni smjer vrtnje. **3 boda**

Državno natjecanje iz fizike

12. do 15. svibnja 2026., Vodice

RJEŠENJE EKSPERIMENTALNOG ZADATKA

3. skupina

1. Zadatak

a)

Pri vrtnji *rattlebacka* oko približno vertikalne osi opaža se različito ponašanje ovisno o smjeru vrtnje.

U jednom smjeru *rattleback* se vrti stabilno, pri čemu je njihanje tijela oko vodoravnih osi slabo izraženo ili gotovo neprimjetno. Kutna brzina postupno se smanjuje zbog trenja, a tijelo se zaustavlja bez promjene smjera vrtnje.

U suprotnom smjeru vrtnja je nestabilna. Nakon kratkog vremena pojavljuje se izraženo njihanje tijela, osobito oko poprečne osi (*pitch*), pri čemu se "kljun" *rattlebacka* giba gore-dolje. Amplituda tog njihanja raste, dok se rotacija oko vertikalne osi usporava. Tijelo se zatim zaustavlja, a potom počinje rotirati u suprotnom smjeru, u kojem je gibanje ponovno stabilno.

Ovakvo ponašanje posljedica je asimetrične raspodjele mase i nepoklapanja glavnih osi tromosti s geometrijskim osima tijela, zbog čega dolazi do sprezanja rotacije oko vertikalne osi i njihanja oko vodoravnih osi. Trenje s podlogom omogućuje prijenos energije između tih oblika gibanja i promjenu smjera vrtnje.

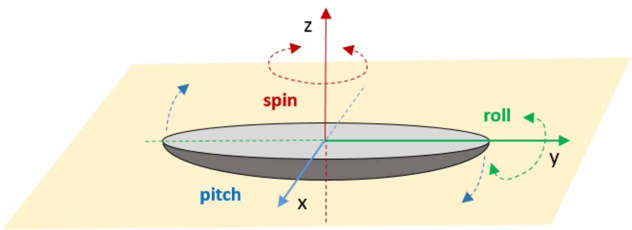
2 boda

b)

Tijekom gibanja *rattleback* može istovremeno izvoditi više vrsta gibanja. Uočava se:

– rotacija oko okomite osi (*spin*), koja se očituje kao zakretanje tijela na podlozi
– rotacija oko uzdužne osi tijela (*roll*), koja se očituje kao naginjanje lijevo-desno (ljuljanje)
– rotacija oko poprečne osi tijela (*pitch*), koja se očituje kao naginjanje naprijed-natrag (njihanje)

Ta se gibanja mogu pojavljivati istodobno i međusobno su povezana.



3 boda

c) Približno vertikalna je os oko koje se *rattleback* zakreće na podlozi, odnosno os rotacije (*spin*).

1 bod

2. zadatak

a)

Rattleback se učvrsti na letvicu pomoću ljepljive mase te se pomoću bifilarnog njihala najprije odredi moment tromosti ovješenog sustava oko vertikalne osi titranja. Period titranja određuje se mjerenjem vremena za više titraja (N).

Za određivanje momenta tromosti samog *rattlebacka* treba provesti mjerenje za:

- praznu letvicu,
- letvicu s *rattlebackom* za odabrani položaj.

Iz perioda titranja i mase sustava računa se moment tromosti pomoću izraza za bifilarno njihalo. Moment tromosti *rattlebacka* dobiva se kao razlika momenta tromosti sustava letvica i *rattlebacka* i momenta tromosti prazne letvice.

Za svaku od dviju odabranih osi *rattleback* se mora postaviti tako da ta os bude na osi titranja, odnosno da bude približno vertikalna, a centar mase *rattlebacka* mora biti na osi titranja. Mjerenje se provodi pri pravilnom titranju oko vertikalne osi, bez izraženog njihanja sustava. **3 boda**

b)

Za mjerenje se odabiru dvije osi za koje je *rattleback* moguće stabilno postaviti na letvicu tako da odabrana os bude vertikalna i da centar mase bude na osi titranja.

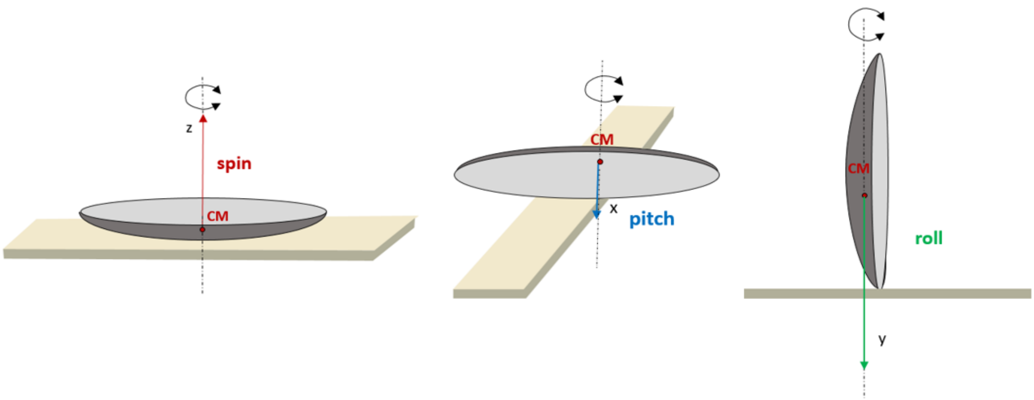
Najpogodnije je odabrati:

- *spin* os — *rattleback* leži na letvici,
- *pitch* os — *rattleback* je postavljen na bok tako da se vertikalna os titranja poklapa s *pitch* osi *rattlebacka*.

Preostala treća os, ***roll* os**, nije pogodna za pouzdano mjerenje ovim postavom jer bi *rattleback* trebalo postaviti u nestabilan položaj, praktički "na nos". Tada je teško ostvariti čisto titranje oko vertikalne osi, pojavljuje se dodatno njihanje i period ne bi odgovarao samo rotaciji oko te osi.

Zato se moment tromosti oko *roll* osi ovim postavom ne može pouzdano odrediti. **2 boda**

c)



2 boda

d)

	letvica			*spin* postav			*pitch* postav		
N	t/s	T/s	$\Delta T/s$	t/s	T/s	$\Delta T/s$	t/s	T/s	$\Delta T/s$
5	5,43	1,086	0,0004	4,45	0,890	-0,0060	4,52	0,904	0,0040
5	5,46	1,092	-0,0056	4,43	0,886	-0,0020	4,46	0,892	0,0160
5	5,49	1,098	-0,0116	4,45	0,890	-0,0060	4,59	0,918	-0,0100
5	5,42	1,084	0,0024	4,39	0,878	0,0060	4,64	0,928	-0,0200
5	5,46	1,092	-0,0056	4,40	0,880	0,0040	4,58	0,916	-0,0080
5	5,4	1,080	0,0064	4,40	0,880	0,0040	4,49	0,898	0,0100
5	5,4	1,080	0,0064	4,39	0,878	0,0060	4,58	0,916	-0,0080
5	5,46	1,092	-0,0056	4,46	0,892	-0,0080	4,55	0,910	-0,0020
5	5,4	1,080	0,0064	4,45	0,890	-0,0060	4,52	0,904	0,0040
5	5,4	1,080	0,0064	4,36	0,872	0,0120	4,46	0,892	0,0160
	$T = 1{,}0864$ s $\bar{T}$ **= 1,09 s** r_m = 1,1 %			$T_{spin} = 0{,}8836$ s $\bar{T}$ **= 0,88 s** r_m = 1,4 %			$T_{pitch} = 0{,}9078$ s $\bar{T}$ **= 0,9 s** r_m = 2,2 %		

2 boda

e)

Masa *rattlebacka*, $m_R = 11\ g = 0{,}011\ kg$

Duljina niti i razmak između njih iznosi: $l = 57\ cm = 0{,}57 m,\ \ d = 20\ cm = 0{,}20\ m$

Masa letve iznosi, $m_L = 16{,}3\ g = 0{,}0163\ kg$

Masa letve i rattlebacka je $m = 0{,}0273\ kg$

Moment tromosti sustava letva i *rattleback* računa se prema izrazu: $I = \frac{mgd^2T^2}{16\pi^2 l}$

Moment tromosti letve:

Iz podataka $T_L = 1{,}0864\ s$

Uvrštavanjem u prethodni izraz slijedi:

$$I = \frac{m_L g d^2 {T_L}^2}{16\pi^2 l} = \frac{0{,}0163kg \cdot 9{,}81ms^{-2}(0{,}2m)^2(1{,}0864s)^2}{16 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}57m} = 8{,}3869 \cdot 10^{-5} kg\ m^2$$

$$\boldsymbol{I_L(\mathrm{exp}) = 8{,}39 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg\ m^2}}$$ **1 bod**

Moment tromosti letve može se alternativno odrediti i teorijski, koristeći se odgovarajućim izrazom za homogenu letvu. Na osnovi teorijskih razmatranja moment tromosti letve može se odrediti prema izrazu za moment tromosti ploče koja rotira oko okomite osi koja prolazi njezinim središtem (centrom mase):

$$I = \frac{1}{12} m(L^2 + b^2)$$

Duljina letve je $L = 25\ cm = 0{,}25\ m$, širina letve je $b = 2{,}8\ cm = 0{,}028\ m$.

Moment tromosti letve je:

$$I_L(teor) = \frac{1}{12} 0{,}0163\mathrm{kg}(0{,}25^2 m^2 + 0{,}028^2) m^2 = 8{,}596 \cdot 10^{-5} kgm^2$$

$$\boldsymbol{I_L(teor) = 8{,}60 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg\ m^2}}$$

Moment tromosti letva + *rattleback*

Spin

$$T_{spin} = 0{,}8836s$$

$$I = \frac{mgd^2{T_{spin}}^2}{16\pi^2 l} = \frac{0{,}0273kg \cdot 9{,}81ms^{-2}(0{,}2m)^2(0{,}8836s)^2}{16 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}57m} = 9{,}2927 \cdot 10^{-5} kgm^2$$

$$\boldsymbol{I_{sustav,spin} = 9{,}29 \cdot 10^{-5} \mathrm{kg\ m^2}}$$

Moment tromosti *rattlebacka* je:

$$I_{rattleback,spin} = I_{sustav,spin} - I_{letva,exp} \Rightarrow I_{rattleback,spin} = 9{,}293 \cdot 10^{-5} kgm^2 - 8{,}387 \cdot 10^{-5} kgm^2$$

$$\boldsymbol{I_{rattleback,spin} = 9{,}06 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg\ m^2}}$$ **1 bod**

Pitch

$$T_{pitch} = 0{,}9078\ s$$

$$I = \frac{mgd^2 T_{pitch}{}^2}{16\pi^2 l} = \frac{0{,}0273kg \cdot 9{,}81ms^{-2}(0{,}2m)^2(0{,}9078s)^2}{16 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}57m} = 9{,}8107 \cdot 10^{-5} kgm^2$$

$$\boldsymbol{I_{sustav,pitch} = 9,811 \cdot 10^{-5} kgm^2}$$

Moment tromosti *rattlebacka* je:

$$I_{rattleback,pitch} = I_{sustav,pitch} - I_{letva,exp} \Rightarrow I_{rattleback,pitch} = 9{,}811 \cdot 10^{-5} kgm^2 - 8{,}387 \cdot 10^{-5} kgm^2$$

$$\boldsymbol{I_{rattleback,pitch} = 1,42 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg\ m^2}}$$

1 bod

f)

Dobiveni momenti tromosti *rattlebacka* oko odabranih osi nisu jednaki.
Prema rezultatima mjerenja, moment tromosti oko ***pitch* osi** veći je od momenta tromosti oko ***spin* osi**:

$$\boldsymbol{I_{pitch} > I_{spin}}$$

To znači da masa *rattlebacka* nije jednako raspoređena oko svih osi. Tijelo ima veći moment tromosti oko one osi od koje je veći dio mase u prosjeku udaljeniji.

Razlika dobivenih momenata pokazuje da *rattleback* nije simetrično tijelo. Njegova nesimetrična raspodjela mase jedan je od razloga zašto se pri vrtnji u različitim smjerovima ponaša različito.

Budući da momenti tromosti ovise o obliku i raspodjeli mase tijela, za druge modele *rattlebacka* može se dobiti drugačiji odnos momenata tromosti.

1 bod

g)

Glavni izvori nesigurnosti:

- mjerenje vremena štopericom: vrijeme reakcije pri pokretanju i zaustavljanju mjerenja, pogreška se smanjuje mjerenjem vremena za više titraja
- određivanje perioda: sustav se prigušuje, pa nije uvijek lako odabrati iste titraje za mjerenje
- neidealno titranje: ako se letvica osim zakretanja oko vertikalne osi još i njiše ili pomiče, izmjereni period ne odgovara čistom bifilarnom titranju
- početni otklon (odstupanje od uvjeta malih kutova)
- položaj centra mase *rattlebacka*: ako centar mase nije na osi titranja, dobiveni moment tromosti uključuje dodatni doprinos zbog pomaka osi
- učvršćivanje *rattlebacka*: ljepljiva masa ili selotejp dodaju malu masu i mogu malo promijeniti raspodjelu mase; moguć je i mali pomak tijekom titranja
- mjerenje duljine niti *l* i razmaka niti *d* (posebno je važno točno izmjeriti *d*, jer u izrazu za moment tromosti ulazi kao kvadratni član)
- nejednake ili neparalelne niti: ako niti nisu jednake duljine ili nisu dobro postavljene, os titranja nije dobro definirana
- prigušenje zbog trenja u ovjesu i otpora zraka
- masa niti i dodatnog pribora: u formuli se zanemaruje, ali u stvarnosti može malo utjecati na rezultat
- napomena, kako je $I \sim d^2 \cdot T^2$, nesigurnosti u mjerenju razmaka između osi *d* i mjerenja perioda *T* imaju velik utjecaj na nesigurnost u određivanju momenta tromosti *I*.

1 bod

3. zadatak

a) U tablici su prikazane tri serije mjerenja vremena trajanja povratne vrtnje t, povratnog kuta φ te ukupnog vremena gibanja rattlebacka t_{uk} (od početka vrtnje do konačnog zaustavljanja).

t/s	φ/°	t_{uk}/s	t_{uk}-t/s	$t/(t_{uk}-t)$	t_{mokro}/s
3,83	350	4,81	0,98	3,91	2,81
3,97	375	4,94	0,97	4,09	2,06
3,77	340	4,63	0,86	4,38	2,79

Na temelju tih mjerenja procijenjeno je vrijeme od početka gibanja do trenutka kada se *rattleback* zaustavi i započne vrtnju u suprotnom smjeru: $\boldsymbol{t_{uk}-t}$.

Dobiveno je da povratna vrtnja traje približno četiri puta dulje od vremena potrebnog da se *rattleback* zaustavi i promijeni smjer vrtnje:

$$\frac{t}{t_{uk}-t} \approx 4$$

1 bod

Može se uočiti da:

- početna vrtnja brzo se zaustavlja (≈ 1 s)
- povratna vrtnja traje znatno dulje (≈ 4 s)
- povratni kut približno je jedan puni okret
- povratna vrtnja sporija je i pravilnija

Gibanje se može opisati kao proces koji se odvija u dvije faze:

- brza faza prijenosa energije iz rotacije u njihanje
- sporija faza povratne rotacije.

1 bod

Promjena uvjeta trenja može se ostvariti, primjerice, promjenom podloge (plastični pladanj / stol) ili navlaživanjem podloge.

Pri smanjenom trenju (navlažena podloga) izmjerena vremena ukupnog gibanja znatno su kraća: $t_{mokro} \approx$ 2,1 s do 2,8 s.

Povratna vrtnja vrlo je slaba ili izostaje.

Smanjenjem trenja reverzija postaje slabija ili nestaje, što pokazuje da trenje ima ključnu ulogu u prijenosu gibanja između rotacije i njihanja. **1 bod**

b) Na početku je energija *rattlebacka* najvećim dijelom kinetička energija rotacije oko približno vertikalne osi. Tijekom gibanja dio te energije prelazi u njihanje oko vodoravnih osi, posebno u *pitch* gibanje, pri čemu se “kljun” rattlebacka giba gore-dolje.

Kako njihanje jača, rotacija u početnom smjeru slabi i *rattleback* se zaustavlja. Zatim se dio energije njihanja prenosi u rotaciju suprotnog smjera. **1 bod**

Ukupna mehanička energija sustava pritom se smanjuje zbog trenja s podlogom i drugih gubitaka, pa je povratna vrtnja slabija od početne i nakon kratkog vremena se zaustavlja.

Ako se trenje smanji, promjena smjera može biti slabije izražena ili se uopće ne dogodi, jer trenje nije samo izvor gubitaka nego sudjeluje i u prijenosu gibanja između vrtnje i njihanja. **1 bod**

c) *Rattleback* ima asimetričnu raspodjelu mase i različite momente tromosti oko različitih osi, zbog čega dolazi do sprezanja rotacije oko približno vertikalne osi i gibanja oko vodoravnih osi. **1 bod**

U jednom smjeru vrtnje to sprezanje pojačava njihanje (osobito oko poprečne osi), dok se u suprotnom smjeru ono pobuđuje znatno slabije. Rezultati iz 2. zadatka pokazuju da momenti tromosti oko odabranih osi nisu jednaki, što potvrđuje nejednaku raspodjelu mase.

Zbog asimetrije i djelovanja sila u dodiru s podlogom nastaje moment koji nakon zaustavljanja može pokrenuti rotaciju u suprotnom smjeru. **1 bod**

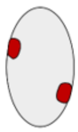
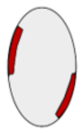
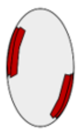
d) Plastična žlica bez drške može se, uz prikladnu nesimetričnu raspodjelu dodatne mase, ponašati kao jednostavan model *rattlebacka*. Dodavanjem samoljepljivih jastučića mijenja se raspodjela mase, položaj centra mase i momenti tromosti žlice s obzirom na različite osi. Zbog toga se vrtnja oko približno okomite osi može sprezati s njihanjem i ljuljanjem tijela, pa se može pojaviti kontrarotacija.

Različiti rasporedi dodane mase i različiti početni smjerovi vrtnje mogu dovesti do različito izražene kontrarotacije. Izraženost kontrarotacije može se procijeniti opažanjem ili jednostavnim mjerenjima.

Kontrarotacija se može opisati različitim veličinama, primjerice:

- povratnim kutom
- brojem povratnih okreta
- trajanjem povratne vrtnje
- ili omjerom $\omega = \frac{\varphi}{t}$, gdje je φ povratni kut, a *t* vrijeme trajanja povratne vrtnje.
  Omjer predstavlja efektivnu srednju kutnu brzinu povratne vrtnje.

U tablici je prikazan primjer mjerenja pri početnoj vrtnji u smjeru kazaljke na satu.

	m_{dod}/g	φ / °	t / s	ω / °/s	raspodjela mase
A	0,6 + 0,6	505	3,57	141,46	
		450	3,65	123,29	
		745	5,06	147,23	
		590	4,54	129,96	
		630	5,03	125,25	
				$\bar{\omega}$ = **133,44 °/s**	
B	0,6 + 0,6	640	4,72	135,59	
		780	5,28	147,73	
		680	5,38	126,39	
		690	5,66	121,91	
		690	4,69	147,12	
				$\bar{\omega}$ = **135,75 °/s**	
C	1,2 + 1,2	420	4,32	97,22	
		320	3,66	87,43	
		360	3,97	90,68	
		400	4,22	94,79	
		420	4,38	95,89	
				$\bar{\omega}$ = **93,20 °/s**	

Masa jednog samoljepivog jastučića iznosi 0,6 grama. Masa prazne žlice je 2,6 grama.

Za raspodjele A, B i C izračunavane su srednje vrijednosti efektivnih srednjih kutnih brzina $\bar{\omega}$ za serije od po pet mjerenja.

U rasporedima A i B korištena je jednaka ukupna dodana masa, ali je u rasporedu B masa razvučenija uz rub žlice. Budući da su dobivene srednje vrijednosti $\bar{\omega}$ vrlo slične, iz tih mjerenja ne može se pouzdano zaključiti da sama razvučenost mase bitno mijenja izraženost kontrarotacije.

U rasporedu C korištena je veća ukupna dodana masa, ali je dobivena manja vrijednost $\bar{\omega}$. To pokazuje da veća dodana masa sama po sebi ne mora značiti izraženiju kontrarotaciju.

1 bod

Ako se promijeni raspored mase ili početni smjer vrtnje, može se promijeniti i ponašanje žlice. Raspored koji pri jednom početnom smjeru ne daje izraženu kontrarotaciju može je pokazati pri suprotnom početnom smjeru vrtnje.

Ako se raspored dodane mase zrcalno preslika s jedne strane uzdužne osi žlice na drugu stranu (lijevo-desno), mijenja se orijentacija asimetrije sustava.

U idealiziranom slučaju time bi se mogao promijeniti i smjer vrtnje u kojem dolazi do jačeg pobuđivanja njihanja, odnosno promijenio bi se „nepovoljan“ smjer vrtnje.

1 bod

U stvarnom pokusu rezultat nije potpuno idealan jer žlica nije savršeno simetrična, jastučići nisu idealno postavljeni, a uvjeti kontakta nisu potpuno jednaki.

Zbog toga se eksperimentalno može pojaviti kontrarotacija u oba početna smjera vrtnje, ali različite izraženosti.

Zaključno, pojava i izraženost kontrarotacije ne ovise samo o količini dodane mase nego i o kombinaciji njezina položaja, raspodjele i orijentacije, o smjeru početne vrtnje te o uvjetima kontakta s podlogom.

1 bod

Državno natjecanje iz fizike

srednja škola – četvrta skupina

13. svibnja 2026.

1. U dubokom svemiru nalazi se crna kocka mase m i stranice duljine s, koja se ponaša kao idealno crno tijelo. Kocka je izložena uniformnom snopu zračenja intenziteta I, koje dolazi iz jednog (dobro definiranog) smjera. Prema Prévostovoj teoriji izmjene, tijelo u termičkoj ravnoteži emitira istu količinu energije koju prima. Snaga koju tijelo emitira definirana je Stefan-Boltzmannovim zakonom. [20 bodova]

   Luminozitet predstavlja ukupnu energiju zračenja koju zvijezda emitira u svim smjerovima u jednoj sekundi.

   (a) Dimenzijskom analizom izvedite Stefan-Boltzmannovu konstantu σ pomoću univerzalnih konstanti: Boltzmannove konstante k_B, brzine svjetlosti c i Planckove konstante h, zanemarujući bezdimenzijski numerički pretfaktor.

   (b) Izrazite ukupnu snagu zračenja koju kocka emitira u prostor ako se nalazi na temperaturi T pomoću s, σ i T.

   (c) Pomoću I i σ, izrazite minimalnu (T_{min}) i maksimalnu (T_{max}) ravnotežnu temperaturu kocke.

   (d) Kuglu, jednakog oplošja i jednake mase m kao dosad korištena kocka, postavimo na konačnu udaljenost od zvijezde luminoziteta L i mase M. Elektromagnetski val koji prenosi snagu P na tijelo djeluje na njega silom $F = P/c$. Pomoću gravitacijske konstante G, mase zvijezde M, mase kugle m, brzine svjetlosti c i duljine s, izrazite luminozitet L^* pri kojemu je kugla u mehaničkoj ravnoteži. Kugla je idealan apsorber pa se ponaša kao crno tijelo. Zanemarite utjecaj kugle na zvijezdu.

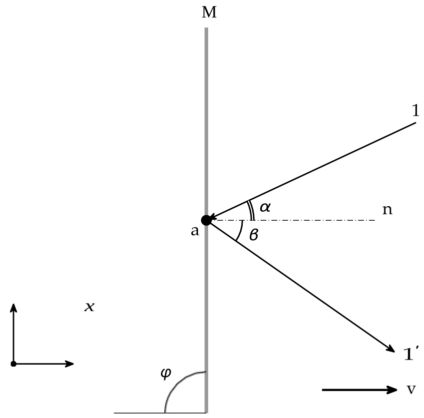
2. Ravno ogledalo giba se u vakuumu relativističkom brzinom v u smjeru $x-$osi. Ogledalo je postavljeno tako da zatvara kut φ s osi gibanja. Mjereno u laboratorijskom sustavu, zraka svjetlosti upada na ogledalo pod kutom α u odnosu na normalu ogledala n, a odbija se pod kutom β u odnosu na normalu ogledala. [18 bodova]

   Lorentzova transformacija za energiju i količinu gibanja između dvaju inercijskih sustava S i S^r (gdje se S^r giba brzinom v u smjeru $x-$osi u odnosu na S) glasi:

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{v}{c^2}E\right) \qquad p'_y = p_y \qquad E' = \gamma(E - vp_x)$$

(a) Za slučaj $\phi = 90^0, \vec{v} = v\hat{x}$, izvedite izraz za ili $\sin\alpha - \sin\beta$ ili $\sin\alpha + \sin\beta$pomoću omjera $\frac{v}{c}$, $\sin(\alpha - \beta)$ i $\sin(\alpha + \beta)$.

(b) Za slučaj $\phi = 90^0$, $\vec{v} = 0.4\,c\,\hat{x}$, $\alpha = 30^0$, izračunajte kut β.



3. Atomski broj berilija je 4. Riješite nezavisne probleme koji uključuju atome ili ione berilija: [18 bodova]

(a) Vodikoliki ioni jesu jednostavni atomski sustavi s jednim elektronom (npr. He^+, Be^{3+}), pa se mogu opisati pomoću Bohrova modela. U odnosu na vodik, povećani nuklearni naboj Z mijenja i radijuse orbita i energijske razine. Radijusi orbita mijenjaju se za faktor Z, a energijski razine za Z^2.

(i) Trostruko ionizirani berilij (Be^{3+}) ima isti radijus orbite kao osnovno stanje atoma vodika. Koliki je glavni kvantni broj n za taj ion Be^{3+}?

(ii) Valentni elektron u ionu Be^{3+} prelazi iz stanja $n = 4$ u stanje $n = 3$. Izračunajte valnu duljinu emitiranog fotona u tom procesu. Kojemu području elektromagnetskog spektra pripada ta valna duljina? (infracrveno zračenje, vidljiva svjetlost, ultraljubičasto zračenje, rendgensko zračenje, gama-zračenje)

(b) Alfa-čestica kinetičke energije E_k = 7 MeV sudara se s mirujućom jezgrom ^9Be. Nakon elastičnog raspršenja, pravci gibanja čestica zatvaraju kut od 60°. Izračunajte kinetičku energiju uzmaknute jezgre berilija.

(c) Promatramo proces neposredno nakon kratkotrajnog ozračivanja mete (vrijeme ozračivanja je zanemarivo u odnosu na vrijeme poluraspada) u kojemu nastaje radionuklid. Prinos nuklearne reakcije koja stvara radionuklide može se opisati na dva načina: bilo veličinom w (omjer broja nuklearnih reakcija i broja bombardirajućih čestica) bilo veličinom k (omjer aktivnosti nastalog radionuklida i broja bombardirajućih čestica).

Izračunajte:

(i) vrijeme poluraspada nastalog radionuklida, pomoću w i k.

(ii) prinos w reakcije $^7Li(p, n)^7Be$ ako nakon bombardiranja mete od litija snopom protona (trajanje $t = 7.2$ s, struja snopa $I = 10\,mA$) aktivnost ^7Be iznosi A $=$

$1.35 \cdot 10^8$ Bq, a njegovo je vrijeme poluraspada je $T_{1/2} = 53$ dana.

4. U suvremenoj medicinskoj dijagnostici izotop tehnecij-99m ($^{99\mathrm{m}}$Tc) upotrebljava se kao radioaktivni marker. On se proizvodi u bolničkim generatorima iz molibdena-99, koji nastaje ozračivanjem mete neutronima. Slovo m u oznaci označava metastabilno stanje, a vrijeme poluraspada izotopa $^{99\mathrm{m}}$Tc iznosi 6 h. [14 bodova]

   (a) Napišite uravnoteženu jednadžbu nuklearne reakcije u kojoj jezgra $^{98}_{42}\mathrm{Mo}$ apsorbira spori neutron i prelazi u $^{99}_{42}\mathrm{Mo}$. Izračunajte početnu aktivnost A_0 uzorka od 10 μg čistog $^{99}_{42}\mathrm{Mo}$ ako je njegovo vrijeme poluraspada $T_{1/2} = 66\,\mathrm{h}$.

   (b) Pacijentu se u krvotok injektira otopina markera $^{99\mathrm{m}}$Tc početne aktivnosti $R_0 = 1.2 \cdot 10^6$ Bq. Nakon 30 minuta, kada se marker jednoliko rasporedio, uzme se uzorak od 10 mL krvi. Izmjerena aktivnost tog uzorka iznosi $2.41 \cdot 10^3$ Bq. Odredite ukupni volumen krvi u tijelu pacijenta.

   (c) Marker prolazi kroz suženje (stenozu) u arteriji gdje se polumjer smanji za 50 %. Ako je brzina krvi u zdravom dijelu arterije $v_1 = 0.4$ m/s, a gustoća krvi $\rho = 1050\,\mathrm{kg/m^3}$, izračunajte promjenu statičkog tlaka u suženju, zanemarujući gravitacijske učinke i viskoznost.

   (d) Nakon snimanja, $^{99\mathrm{m}}$Tc se iz tijela eliminira dvama neovisnim procesima istovremeno:

   - radioaktivnim raspadom s poluvremenom $T_{\mathrm{rad}} = 6$ h
   - biološkim izlučivanjem putem bubrega s biološkim poluvremenom $T_{\mathrm{bio}} = 30\,\mathrm{h}$ (koje smo zanemarili u zadatku pod (b)).

   Izračunajte efektivno poluvrijeme T_{eff} markera u tijelu, odnosno vrijeme nakon kojega se njegova količina smanji na polovicu početne vrijednosti.

Državno natjecanje iz fizike

srednja škola – četvrta skupina

13. svibnja 2026.

1. U dubokom svemiru nalazi se crna kocka mase m i stranice duljine s, koja se ponaša kao idealno crno tijelo. Kocka je izložena uniformnom snopu zračenja intenziteta I, koje dolazi iz jednog (dobro definiranog) smjera. Prema Prévostovoj teoriji izmjene, tijelo u termičkoj ravnoteži emitira istu količinu energije koju prima. Snaga koju tijelo emitira definirana je Stefan-Boltzmannovim zakonom.

   Luminozitet predstavlja ukupnu energiju zračenja koju zvijezda emitira u svim smjerovima u jednoj sekundi.

   (a) Dimenzijskom analizom izvedite Stefan-Boltzmannovu konstantu σ pomoću univerzalnih konstanti: Boltzmannove konstante k_B, brzine svjetlosti c i Planckove konstante h, zanemarujući bezdimenzijski numerički pretfaktor.

   (b) Izrazite ukupnu snagu zračenja koju kocka emitira u prostor ako se nalazi na temperaturi T pomoću s, σ i T.

   (c) Pomoću I i σ, izrazite minimalnu ($T_{\min}$) i maksimalnu ($T_{\max}$) ravnotežnu temperaturu kocke.

   (d) Kuglu, jednakog oplošja i jednake mase m kao dosad korištena kocka, postavimo na konačnu udaljenost od zvijezde luminoziteta L i mase M. Elektromagnetski val koji prenosi snagu P na tijelo djeluje na njega silom $F = P/c$. Pomoću gravitacijske konstante G, mase zvijezde M, mase kugle m, brzine svjetlosti c i duljine s, izrazite luminozitet L^* pri kojemu je kugla u mehaničkoj ravnoteži. Kugla je idealan apsorber pa se ponaša kao crno tijelo. Zanemarite utjecaj kugle na zvijezdu.

(a)

- Stefan-Boltzmannov zakon glasi $j^* = \sigma T^4$, gdje je j^* snaga zračenja po jedinici površine. Dimenzija konstante σ je:

$$[\sigma] = \frac{[j^*]}{[T^4]} = \frac{\mathrm{W/m^2}}{\mathrm{K^4}} = \mathrm{kg \cdot s^{-3} \cdot K^{-4}} \qquad \text{[1 bod]}$$

  Pretpostavimo da je $\sigma = k_B^a \cdot c^b \cdot h^c$. Dimenzije osnovnih konstanti su:

  - $[k_B] = \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}}$

– $[c] = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$

– $[h] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$

[1 bod]

Izjednačavanjem dimenzija lijeve i desne strane $[\sigma] = [k_B]^a [c]^b [h]^c$ dobivamo sustav jednadžbi za eksponente:

– kelvin (K): $-a = -4 \implies a = 4$

– kilogram (kg): $a + c = 1 \implies 4 + c = 1 \implies c = -3$

– metar (m): $2a + b + 2c = 0 \implies 8 + b - 6 = 0 \implies b = -2$

[1 bod]

Uvrštavanjem dobivenih eksponenata, traženi oblik izraza za Stefan-Boltzmannovu konstantu je:

$$\sigma \sim \frac{k_B^4}{c^2 h^3}$$ [1 bod]

(b)

- Kocka ima 6 ploha, svaka površine s^2. Prema zakonu zračenja, ukupna snaga koju emitira crno tijelo (kocka):

$$P_{\mathrm{em}} = \sigma A_{\mathrm{ukupno}} T^4 = 6s^2 \sigma T^4$$ [2 boda]

(c)

- Snaga koju kocka apsorbira iz snopa intenziteta I proporcionalna je njezinoj sjeni, odnosno efektivnoj površini A_0:

$$P_{\mathrm{abs}} = I A_0$$ [1 bod]

Izjednačavanjem $P_{\mathrm{abs}} = P_{\mathrm{em}}$ dobivamo:

$$I A_0 = 6s^2 \sigma T^4 \implies T = \sqrt[4]{\frac{I A_0}{6\sigma s^2}}$$ [1 bod]

- Analiza ekstrema efektivne površine kocke:

  – minimum se postiže kada je snop okomit na jednu plohu kocke.
  Tada je $A_0 = s^2$.

[2 boda]

$$T_{\min} = \sqrt[4]{\frac{I s^2}{6\sigma s^2}} = \sqrt[4]{\frac{I}{6\sigma}}$$ [1 bod]

– maksimum se postiže kada je snop paralelan s prostornom dijagonalom kocke. Projekcija kocke tada je pravilan šesterokut stranice $s\sqrt{2/3}$, čija je površina $A_0 = s^2\sqrt{3}$. [2 boda]

$$T_{\max} = \sqrt[4]{\frac{Is^2\sqrt{3}}{6\sigma s^2}} = \sqrt[4]{\frac{I\sqrt{3}}{6\sigma}}$$ [1 bod]

(d)

- Zadano je da kugla ima jednako oplošje kao kocka stranice s. Iz njihove jednakosti dobivamo polumjer kugle R:

$$4R^2\pi = 6s^2 \implies R^2 = \frac{3s^2}{2\pi}$$ [1 bod]

- Poprečni presjek kugle iznosi $A_{ps} = R^2\pi = \frac{3}{2}s^2$. [1 bod]
- Uvjet ravnoteže jest izjednačavanje gravitacijske sile F_G i sile zračenja F_{rad}. [1 bod]
- Snaga koju kugla prima na udaljenosti r je $P = I \cdot A_{ps} = \frac{L}{4\pi r^2} \cdot \frac{3}{2}s^2$. [1 bod]

$$F_G = F_{rad} \implies G\frac{Mm}{r^2} = \frac{P}{c} = \frac{L \cdot \frac{3}{2}s^2}{4\pi r^2 c}$$ [1 bod]

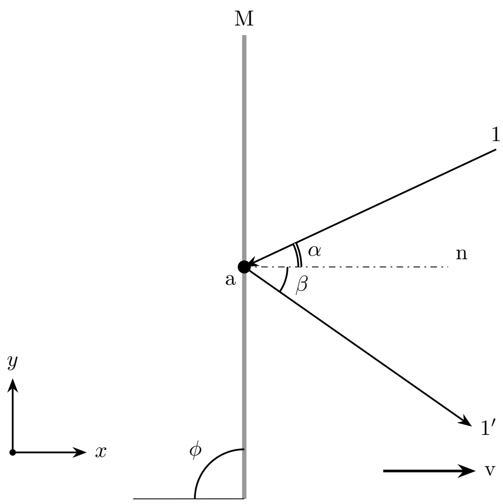
- Izražavanjem luminoziteta L^*:

$$L^* = \frac{8\pi GMmc}{3s^2}$$ [1 bod]

2. Ravno ogledalo giba se u vakuumu relativističkom brzinom v u smjeru $x-$osi. Ogledalo je postavljeno tako da zatvara kut ϕ s osi gibanja. Mjereno u laboratorijskom sustavu, zraka svjetlosti upada na ogledalo pod kutom α u odnosu na normalu ogledala n, a odbija se pod kutom β u odnosu na normalu ogledala.

(a) Za slučaj $\phi = 90°$ i $\vec{v} = v\hat{x}$, izvedite izraz za ili $\sin\alpha - \sin\beta$ ili $\sin\alpha + \sin\beta$ pomoću omjera $\frac{v}{c}$, $\sin(\alpha+\beta)$ i $\sin(\alpha-\beta)$.

(b) Za slučaj $\phi = 90°$, $\vec{v} = 0.4c\,\hat{x}$, $\alpha = 30°$, izračunajte kut β.



Lorentzova transformacija za energiju i količinu gibanja između dvaju inercijskih sustava S i S' (gdje se S' giba brzinom v u smjeru $x-$osi u odnosu na S) glasi:

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{v}{c^2}E\right), \qquad p'_y = p_y, \qquad E' = \gamma(E - vp_x)$$

(a)

- Energija fotona je $E = pc$. [1 bod]
- Razmatramo komponente količine gibanja fotona u laboratorijskom sustavu S, gdje se zrcalo giba brzinom $\vec{v} = v\hat{x}$.
- Prije refleksije:

$$\vec{p} = (-p\cos\alpha, -p\sin\alpha) \qquad \text{[1 bod]}$$

- Nakon refleksije:

$$\vec{\tilde{p}} = (\tilde{p}\cos\beta, -\tilde{p}\sin\beta) \qquad \text{[1 bod]}$$

- Lorentzove transformacije za y-komponentu i energiju pri prijelazu u sustav zrcala S' glase:

$$p'_y = p_y = -p\sin\alpha$$

$$E' = \gamma(E - vp_x) = \gamma(pc - v(-p\cos\alpha)) = \gamma pc(1 + \frac{v}{c}\cos\alpha) \qquad \text{[1 bod]}$$

- Budući da je u sustavu S' količina gibanja fotona $p' = E'/c$, imamo:

$$p' = \gamma p(1 + \frac{v}{c}\cos\alpha) \qquad \text{[1 bod]}$$

- Sinus kuta u sustavu zrcala α' dobivamo iz y-komponente:

$$\sin\alpha' = \frac{|p'_y|}{p'} = \frac{p\sin\alpha}{\gamma p(1+\frac{v}{c}\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\gamma(1+\frac{v}{c}\cos\alpha)} \qquad \text{[1 bod]}$$

- Analogno, za foton nakon refleksije (gdje je $\tilde{p}_x = \tilde{p}\cos\beta$):

$$\sin\beta' = \frac{|\tilde{p}'_y|}{\tilde{p}'} = \frac{\tilde{p}\sin\beta}{\gamma \tilde{p}(1-\frac{v}{c}\cos\beta)} = \frac{\sin\beta}{\gamma(1-\frac{v}{c}\cos\beta)} \qquad \text{[1 bod]}$$

- U sustavu zrcala vrijedi zakon refleksije $\alpha' = \beta'$, pa izjednačavamo izraze:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\frac{v}{c}\cos\alpha} = \frac{\sin\beta}{1-\frac{v}{c}\cos\beta} \qquad \text{[3 boda]}$$

- Množenjem unakrsno dobivamo:

$$\sin\alpha - \sin\beta = \frac{v}{c}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

- Adicijskom formulom dolazimo do konačnog izraza:

$$\sin\alpha - \sin\beta = \frac{v}{c}\sin(\alpha+\beta) \qquad \text{[1 bod]}$$

(b)

- Raspisujemo adicijsku formulu:

$$\sin\alpha - \sin\beta = \frac{v}{c}\left(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\right)$$

$$\sin\alpha\left(1-\frac{v}{c}\cos\beta\right) = \sin\beta\left(1+\frac{v}{c}\cos\alpha\right)$$

- Kvadriranjem dobivamo:

$$\sin^2\alpha\left(1-2\frac{v}{c}\cos\beta+\frac{v^2}{c^2}\cos^2\beta\right) = \sin^2\beta\left(1+2\frac{v}{c}\cos\alpha+\frac{v^2}{c^2}\cos^2\alpha\right) \qquad \text{[1 bod]}$$

- Koristeći se identitetom $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, zapišemo prethodni izraz kao kvadratnu jednadžbu u $\cos\beta$: [1 bod]

$$(1-\cos^2\alpha)\left(1-2\frac{v}{c}\cos\beta+\frac{v^2}{c^2}\cos^2\beta\right) = (1-\cos^2\beta)\left(1+2\frac{v}{c}\cos\alpha+\frac{v^2}{c^2}\cos^2\alpha\right)$$

$$\cos^2\beta\left[1+\frac{2v}{c}\cos\alpha+\frac{v^2}{c^2}\right]+\cos\beta\left[\frac{2v}{c}\left(-1+\cos^2\alpha\right)\right]+\left[-1-\frac{2v}{c}\cos\alpha-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\alpha\right]=0$$

- Rješenja jednadžbe:

$$(\cos\beta)_1 = -\frac{\cos\alpha + 2\frac{v}{c}\cos^2\alpha + \frac{v^2}{c^2}\cos\alpha}{1 + \frac{2v}{c}\cos\alpha + \frac{v^2}{c^2}} = -\cos\alpha \qquad \text{[1 bod]}$$

$$(\cos\beta)_2 = \frac{\frac{2v}{c} + \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\cos\alpha}{1 + \frac{2v}{c}\cos\alpha + \frac{v^2}{c^2}} \qquad \text{[1 bod]}$$

- Za $v = 0$, uočavamo da se samo drugo rješene svodi na $\cos\alpha = \cos\beta$ te da je jedino ono fizički smisleno. [2 boda]

- Uvrstimo $\alpha = \frac{\pi}{6}$ i $v = 0.4c$:

$$\cos\beta = \frac{0.8 + (1 + 0.16)\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 0.4 \cdot \sqrt{3} + 0.16} \Rightarrow \beta = 13.1^\circ \qquad \text{[1 bod]}$$

3. Atomski broj berilija je 4. Riješite nezavisne probleme koji uključuju atome ili ione berilija:

(a) Vodikoliki ioni jesu jednostavni atomski sustavi s jednim elektronom (npr. He^+, Be^{3+}), pa se mogu opisati pomoću Bohrova modela. U odnosu na vodik, povećani nuklearni naboj Z mijenja i radijuse orbita i energijske razine. Radijusi orbita mijenjaju se za faktor Z, a energijske razine za Z^2.

(i) Trostruko ionizirani berilij (Be^{3+}) ima isti radijus orbite kao osnovno stanje atoma vodika. Koliki je glavni kvantni broj n za taj ion Be^{3+}?

(ii) Valentni elektron u ionu Be^{3+} prelazi iz stanja $n = 4$ u stanje $n = 3$. Izračunajte valnu duljinu emitiranog fotona u tom procesu. Kojemu području elektromagnetskog spektra pripada ta valna duljina? (infracrveno zračenje, vidljiva svjetlost, ultraljubičasto zračenje, rendgensko zračenje, gama-zračenje)

(b) Alfa-čestica kinetičke energije $E_k = 7$ MeV sudara se s mirujućom jezgrom ^{9}Be. Nakon elastičnog raspršenja, pravci gibanja čestica zatvaraju kut od 60°. Izračunajte kinetičku energiju uzmaknute jezgre berilija.

(c) Promatramo proces neposredno nakon kratkotrajnog ozračivanja mete (vrijeme ozračivanja zanemarivo je u odnosu na vrijeme poluraspada) u kojemu nastaje radionuklid. Prinos nuklearne reakcije koja stvara radionuklide može se opisati na dva načina: bilo veličinom w (omjer broja nuklearnih reakcija i broja bombardirajućih čestica) bilo veličinom k (omjer aktivnosti nastalog radionuklida i broja bombardirajućih čestica). Izračunajte:

(i) vrijeme poluraspada nastalog radionuklida, pomoću w i k.

(ii) prinos w reakcije $^7\mathrm{Li}(p,n)^7\mathrm{Be}$ ako nakon bombardiranja mete od litija snopom protona (trajanje $t = 7.2$ s, struja snopa $I = 10\,\mathrm{mA}$) aktivnost ^{7}Be iznosi $A = 1.35 \cdot 10^8$ Bq, a njegovo je vrijeme poluraspada je $T_{1/2} = 53$ dana.

(a)

(i)

- Radijus n-te orbite u Bohrovu modelu: $r_n = \frac{n^2}{Z} r_1^{\mathrm{H}}$ [2 boda]
- Za Be^{3+} je $Z = 4$.
- Uvjet zadatka: $r_n(\mathrm{Be}^{3+}) = r_1(\mathrm{H})$

$$\frac{n^2}{4} r_1^{\mathrm{H}} = r_1^{\mathrm{H}} \implies \frac{n^2}{4} = 1 \implies n = 2$$ [1 bod]

(ii)

– Energija razine u ionu sličnom vodiku: $E_n = -13.6\,\mathrm{eV} \cdot \frac{Z^2}{n^2}$ [1 bod]

– Energija emitiranog fotona ($Z = 4$):

$$\Delta E = E_4 - E_3 = 13.6 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right)\ \mathrm{eV}$$

$$\Delta E = 10.58\,\mathrm{eV}$$

– Valna duljina:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{10.58\,\mathrm{eV}} = 117.2\,\mathrm{nm}$$ [0.5 boda]

– Valna duljina pripada području infracrvenog zračenja. [0.5 boda]

(b)

- Odaberimo da se alfa-čestica prije sudara gibala duž $x-$osi, te označimo količine gibanja nakon sudara $\vec{p}_{\mathrm{Be}}$ i $\vec{p}_\alpha$.
- Zakon očuvanja količine gibanja:

$$\sqrt{2m_\alpha E_k}\,\hat{x} = \vec{p}_{\mathrm{Be}} + \vec{p}_\alpha$$ [1 bod]

- Kvadriranjem dobivamo:

$$2m_\alpha E_k = p_{\mathrm{Be}}^2 + p_\alpha^2 + 2p_{\mathrm{Be}}p_\alpha \cos\theta \tag{1}$$

- Zakon očuvanja energije:

$$E_k = \frac{p_{\mathrm{Be}}^2}{2m_{\mathrm{Be}}} + \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}$$ [1 bod]

- Pomnožimo s $2m_\alpha$:

$$2m_\alpha E_k = p_\alpha^2 + \frac{m_\alpha p_{\mathrm{Be}}^2}{m_{\mathrm{Be}}} \tag{2}$$

- Oduzimanjem jednadžbi (1) i (2) dobivamo:

$$p_{\mathrm{Be}}^2\left(1 - \frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Be}}}\right) + 2p_{\mathrm{Be}}p_\alpha\cos\theta = 0$$ [1 bod]

- Odbacujući rješenje $p_{\mathrm{Be}} = 0$:

$$p_{\mathrm{Be}}\left(1 - \frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Be}}}\right) + 2p_\alpha\cos\theta = 0$$ [1 bod]

- Imajući na umu da vrijedi $m_\alpha < m_{\mathrm{Be}}$ i $p_{\alpha,\mathrm{Be}} > 0$, :

$$p_\alpha = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Be}}}\right)\frac{p_{\mathrm{Be}}}{\cos\theta}$$ [1 bod]

  zaključujemo da vrijedi $-1 < \cos\theta < 0$, tj. $\theta = 120°$.

- Vratimo se u zakon očuvanja energije:

$$E_k = \frac{p_{\mathrm{Be}}^2}{2m_{\mathrm{Be}}}\left[1 + \left(1 - \frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Be}}}\right)^2 \frac{m_{\mathrm{Be}}/m_\alpha}{4\cos^2\theta}\right]$$ [1 bod]

- Energija jezgre berilija nakon sudara:

$$\frac{p_{\mathrm{Be}}^2}{2m_{\mathrm{Be}}} = \frac{E_k}{1 + \frac{(m_{\mathrm{Be}}-m_\alpha)^2}{m_{\mathrm{Be}}m_\alpha}\frac{1}{4\cos^2\theta}} = 4.13\ \mathrm{MeV}$$ [1 bod]

(c)

(i) Aktivnost je definirana kao $A = \lambda N$.

- Broj reakcija ili stvorenih jezgara je $N = w \cdot N_p$.
- Aktivnost po upadnoj čestici je $k = \frac{A}{N_p} = \frac{\lambda(wN_p)}{N_p} = \lambda w$ [1 bod]

$$k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} w \implies T_{1/2} = \frac{w}{k}\ln 2$$ [1 bod]

(ii) Broj upadnih protona:

$$N_p = \frac{I \cdot t}{e} = \frac{10 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A} \cdot 7.2\,\mathrm{s}}{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = 4.49 \cdot 10^{17}$$ [1 bod]

- Konstanta raspada ($T_{1/2} = 53 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s} = 4.58 \cdot 10^6\,\mathrm{s}$):

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 1.51 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}^{-1}$$ [1 bod]

- Iz $A = N\lambda = (wN_p)\lambda$ slijedi:

$$w = \frac{A}{N_p\lambda} = \frac{1.35 \cdot 10^8}{4.49 \cdot 10^{17} \cdot 1.51 \cdot 10^{-7}}$$ [1 bod]

$$w = 1.99 \cdot 10^{-3} \quad (\text{ili } 0.2\%)$$ [1 bod]

4. U suvremenoj medicinskoj dijagnostici izotop tehnecij-99m ($^{99\mathrm{m}}$Tc) upotrebljava se kao radioaktivni marker. On se proizvodi u bolničkim generatorima iz molibdena-99, koji nastaje ozračivanjem mete neutronima. Slovo m u oznaci označava metastabilno stanje, a vrijeme poluraspada izotopa $^{99\mathrm{m}}$Tc iznosi 6 h.

   (a) Napišite uravnoteženu jednadžbu nuklearne reakcije u kojoj jezgra $^{98}_{42}$Mo apsorbira spori neutron i prelazi u $^{99}_{42}$Mo. Izračunajte početnu aktivnost A_0 uzorka od $10\,\mu$g čistog $^{99}_{42}$Mo ako je njegovo vrijeme poluraspada $T_{1/2} = 66\,$h.

   (b) Pacijentu se u krvotok injektira otopina markera $^{99\mathrm{m}}$Tc početne aktivnosti $R_0 = 1.2 \cdot 10^6\,$Bq. Nakon 30 minuta, kada se marker jednoliko rasporedio, uzme se uzorak od 10 mL krvi. Izmjerena aktivnost tog uzorka iznosi $2.41 \cdot 10^3\,$Bq. Odredite ukupni volumen krvi u tijelu pacijenta.

   (c) Marker prolazi kroz suženje (stenozu) u arteriji gdje se polumjer smanji za 50 %. Ako je brzina krvi u zdravom dijelu arterije $v_1 = 0.4\,\mathrm{m/s}$, a gustoća krvi $\rho = 1050\,\mathrm{kg/m^3}$, izračunajte promjenu statičkog tlaka u suženju, zanemarujući gravitacijske učinke i viskoznost.

   (d) Nakon snimanja, $^{99\mathrm{m}}$Tc se iz tijela eliminira dvama neovisnim procesima istovremeno:

   – radioaktivnim raspadom s poluvremenom $T_{\mathrm{rad}} = 6\,$h
   – biološkim izlučivanjem putem bubrega s biološkim poluvremenom $T_{\mathrm{bio}} = 30\,$h (koje smo zanemarili u zadatku pod (b)).

   Izračunajte efektivno poluvrijeme T_{eff} markera u tijelu, odnosno vrijeme nakon kojega se njegova količina smanji na polovicu početne vrijednosti.

(a)

$$^{98}_{42}\mathrm{Mo} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{99}_{42}\mathrm{Mo} \qquad \text{[1 bod]}$$

- Broj atoma u uzorku mase $m = 10 \cdot 10^{-6}$ g:

$$N = \frac{m}{M} N_A = \frac{10 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{g}}{99\,\mathrm{g/mol}} \cdot 6.022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}} = 6.08 \cdot 10^{16} \qquad \text{[1 bod]}$$

- Konstanta raspada ($T_{1/2} = 66\,\mathrm{h} = 66 \cdot 3600\,\mathrm{s} = 237\,600\,\mathrm{s}$):

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0.6931}{237\,600\,\mathrm{s}} = 2.917 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s^{-1}}$$

- Početna aktivnost:

$$A_0 = \lambda N = 2.917 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s^{-1}} \cdot 6.08 \cdot 10^{16} = 1.77 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Bq} \qquad \text{[1 bod]}$$

(b)

- Ukupna aktivnost markera ^{99m}Tc u trenutku uzimanja uzorka ($t = 0.5\,\mathrm{h}$, $T_{1/2} = 6\,\mathrm{h}$):

$$R(t) = R_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}} \qquad \text{[1 bod]}$$

$$R(t) = 1.2 \cdot 10^6\,\mathrm{Bq} \cdot 2^{-0.5/6} = 1.13 \cdot 10^6\,\mathrm{Bq} \qquad \text{[1 bod]}$$

- Aktivnost po jedinici volumena krvi (izmjerena u uzorku od $V_s = 10\,\mathrm{mL}$):

$$a = \frac{A_s}{V_s} = \frac{2.41 \cdot 10^3\,\mathrm{Bq}}{10\,\mathrm{mL}} = 241\,\mathrm{Bq/mL} \qquad \text{[1 bod]}$$

- Ukupni volumen krvi:

$$V = \frac{R(t)}{a} = \frac{1.13 \cdot 10^6\,\mathrm{Bq}}{241\,\mathrm{Bq/mL}} = 4689\,\mathrm{mL} = 4.689\,\mathrm{L} \qquad \text{[1 bod]}$$

(c)

$$r_2 = 0.5\,r_1 \Rightarrow A_2 = \tfrac{1}{4}A_1$$

- Jednadžba kontinuiteta:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad \text{[1 bod]}$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}\,v_1 = 4\,v_1 = 4 \cdot 0.4\,\mathrm{m/s} = 1.6\,\mathrm{m/s}$$

- Bernoullijeva jednadžba:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad \text{[1 bod]}$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2}\rho\big(v_2^2 - v_1^2\big) = \tfrac{1}{2} \cdot 1050\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \big[(1.6)^2 - (0.4)^2\big]\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

$$\Delta p = 1260\,\mathrm{Pa} = 1.26\,\mathrm{kPa} \qquad \text{[1 bod]}$$

(d) Kada djeluju dva neovisna procesa eliminacije, konstante raspada zbrajaju se:

$$\lambda_{\mathrm{eff}} = \lambda_{\mathrm{rad}} + \lambda_{\mathrm{bio}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{T_{\mathrm{eff}}} = \frac{1}{T_{\mathrm{rad}}} + \frac{1}{T_{\mathrm{bio}}} \qquad \text{[3 boda]}$$

$$\frac{1}{T_{\mathrm{eff}}} = \frac{1}{6\,\mathrm{h}} + \frac{1}{30\,\mathrm{h}} \implies T_{\mathrm{eff}} = 5\,\mathrm{h} \qquad \text{[1 bod]}$$

Efektivno poluvrijeme kraće je od obaju pojedinačnih poluvremena.

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Vodice, 12. – 15. svibnja 2026.

Srednje škole – 4. grupa

EKSPERIMENTALNI ZADATAK

Pribor:

- krojački metar
- trokut
- pomična mjerka
- spajalica
- dvije šivaće igle različitih promjera i duljina
- čačkalica
- laserski pokazivač
- bijeli papir A4
- milimetarski papir A4
- plastelin, dva valjka
- gumica
- kvačica
- tri srebrne ljepljive trake širine 1 cm
- selotejp i škare
- drveni kvadar

Zadatak:

1. Odredite valnu duljinu crvene laserske svjetlosti koristeći se dvjema od četiriju danih "niti" tako da:
   a) opišete teorijsku osnovu eksperimentalnog postupka uz skicu s označenim fizikalnim veličinama koje će biti osnova za mjerenja ………………. 3 boda
   b) precizno i jasno navedete kako ste pripremili eksperimentalni set i odabrali dvije "niti" za mjerenja ………………. 3 boda
   c) precizno i jasno navedete kako ste proveli mjerenja ………………. 3 boda
   d) nacrtate skicu eksperimentalnog seta s označenim veličinama koje mjerite ………………. 3 boda
   e) tablično prikažete rezultate za minimalno pet mjerenja s istom niti …………… 6 bodova
   f) provedete račun pogreške i odredite srednju vrijednost za svaku nit, maksimalno pojedinačno odstupanje, maksimalnu relativnu pogrešku i navedete zapis točnog rezultata …………… 6 bodova
   g) usporedite dobivene eksperimentalne rezultate za dvije različite niti ……………… 2 boda
   h) usporedite dobivene eksperimentalne rezultate za dvije različite niti s poznatim intervalom valnih duljina za crvenu svjetlost ………….... 2 boda
   i) navedete minimalno dva utjecaja na preciznost mjerenja i što je napravljeno u pripremi eksperimentalnog seta te pri provedbi mjerenja da se ti utjecaji smanje ………….... 2 boda

---

Ukupno: …………………………………………………………………. **30 bodova**

Natjecateljima želimo uspješan rad!

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Vodice, 12. – 15. svibnja 2026.

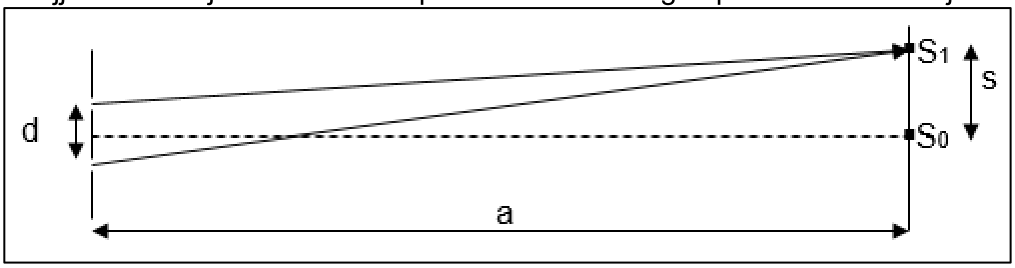
Srednje škole – 4. grupa

Eksperimentalni zadatak – rješenje

1. Odredite valnu duljinu crvene laserske svjetlosti koristeći se dvjema od četiriju danih niti tako da:
a) opišete teorijsku osnovu eksperimentalnog postupka uz skicu s označenim fizikalnim veličinama koje će biti osnova za mjerenja ………………. 3 boda

Teorijska osnova eksperimentalnog postupka odnosi se na opis ogiba svjetlosti na niti i nastajanje interferentne slike na zastoru, pri čemu je najvažnije spomenuti:

- ogib ili difrakcija svjetlosna je pojava skretanja svjetlosti u geometrijsku sjenu zapreke ili pukotine i jedan je od dokaza valne prirode svjetlosti
- na mjestima na zastoru do kojih svjetlosni valovi dolaze s razlikom hoda $n\lambda$ nastaju svijetle pruge konstruktivne interferencije; tamne pruge posljedica su destruktivne interferencije
- ako je upadna svjetlost monokromatska – svijetle pruge imaju boju upadne svjetlosti, u suprotnom slučaju na zastoru dobivamo pruge spektralnih boja
- ogib na niti tumači se Huygensovim principom analogno kao i interferencija valova iz koherentnih izvora, te se najjednostavnije skicom može prikazati kao Youngov pokus interferencije:



Slika 1. Skica Youngova pokusa

Na skici 1. oznake se odnose na:
d – udaljenost između dviju pukotina – u eksperimentalnom primjeru debljina niti
a – udaljenost od niti do zastora
s – udaljenost između središnje i prve svijetle pruge.

Valna duljina može se odrediti prema izrazu /izvod nije nužan/:

$$n\lambda = (s \cdot d)/a \qquad (1)$$

teorijski opis – 1 bod, skica – 1 bod i izraz (1) – 1 bod.

b) precizno i jasno navedete kako ste pripremili eksperimentalni set i odabrali dvije "niti" za mjerenja ………………. 3 boda

Potrebno je jasno opisati postavljanje eksperimentalnog seta:
- na stol se postavi krojački metar radi preciznijeg očitavanja veličine 'a'
- na jednoj se strani okomito na krojački metar koji služi kao osnovni pravac za postavljanje elemenata postavi drveni kvadar na kojemu je na jednoj većoj plohi zalijepljen milimetarski papir ili bijeli papir
- na drugoj se strani postavi laserski pokazivač koji se prije početka mjerenja zalijepi za stol srebrnom trakom tako da bude uključen do završetka mjerenja
- između se na krojački metar stavi valjak plastelina u koji je zabodena nit
- ako je kao jedna od niti odabrana spajalica, ona se prvo jednim dijelom rastvori i zatim postoji više načina kako se pričvrsti za plastelin, uz jedini uvjet da dio koji je nit bude okomit na stol
- kvadar plastelina s niti pomiče se ispred laserskog snopa dok se na zaslonu ne dobije interferentna slika, ili se pomiče laser prije nego što se učvrsti srebrnom trakom

- prema potrebi, laserski pokazivač može se povisiti tako da se stavi na sloj plastelina iz drugog valjka.

Priznaju se alternativni načini pripreme eksperimentalnog seta (korištenje kvačice i gumice) koji dovode do fizikalno točnog postupka i traženog rezultata.

Odabir dviju niti: koliko će se valovi ogibati, ovisi o širini otvora pukotine u odnosu prema valnoj duljini valova; ako je širina otvora mnogo veća od valne duljine svjetlosti, ogib je malen; smanjivanjem širine otvora/niti ogib postaje izrazitiji – na to treba obratiti pažnju pri izboru pogodnih i tanjih modela niti, radi lakšeg mjerenja razmaka između pruga na ogibnoj slici.

Precizan opis izgleda eksperimentalnog seta sa svim elementima i načinima postavljanja – 2 boda; opis razloga odabira dviju niti od predloženih četiriju modela – 1 bod.

c) precizno i jasno navedete kako ste proveli mjerenja ………………. 3 boda

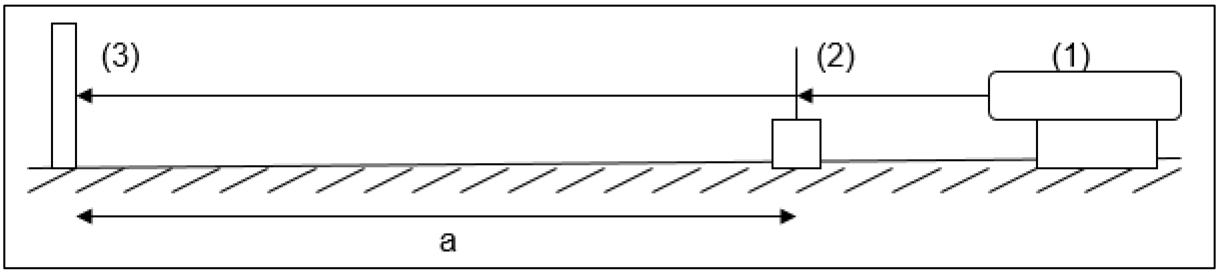
Krojački metar služi za mjerenje veličine 'a', udaljenost od niti do zastora.
Debljinu niti 'd' potrebno je, radi veće točnosti, odrediti pomičnom mjerkom tako da se za minimalno tri mjerenja odredi srednja vrijednost.
Udaljenost između središnje i prve svijetle točke na zaslonu može se mjeriti trokutom, pomičnom mjerkom, ili se prvo na milimetarskom papiru / bijelom papiru mogu staviti oznake za sredine tih dviju točaka i zatim mjeriti trokutom ili pomičnom mjerkom.

Pomična mjerka / pomično mjerilo omogućuje točnost mjerenja dužina na desetinku milimetra. Pomična mjerka sastoji se od štapa na kojemu su označeni centimetri i milimetri, duž kojega može kliziti otvor koji nosi skalu 'nonij' i tako omogućuje očitavanje 1/10 mm. Svaki djelić na noniju za 1/10 je manji od djelića na štapu. Podudaraju li se npr. treća crtica nonijeve skale sa trećom crticom štapa, razlika između je 0,3 mm.

Po 1 bod za jasan opis kako su mjerene veličine 'a', 'd' i 's'.

d) nacrtate skicu eksperimentalnog seta s označenim veličinama koje mjerite ………………. 3 boda

Skica treba sadržavati tri bitna dijela: laserski pokazivač (1), držač s niti (2) i zaslon (3). Primjer skice dan je na Slici 2. Priznaje se i tlocrt.



Slika 2. Raspored elemenata pri mjerenju

Zornost i preglednost skice – 1 bod, jasno označavanje elemenata – 1 bod, oznaka barem jedne veličine koja se mjeri (npr. 'a' kao na Slici 2) – 1 bod.

e) tablično prikažete rezultate za minimalno pet mjerenja s istom niti ……… 6 bodova

Prvo je potrebno napraviti tablicu za određivanje debljine niti 'd' pomoću pomične mjerke, uz najmanje tri mjerenja za svaku nit.

Tablica 1:
Mjerenje d-niti pomičnom mjerkom

Red. br.	d_1/m	$d_{sr.1} - d_i$	d_2/m	$d_{sr.2} - d_i$
1.				
2.				
3.				

Zatim je potrebno napraviti tablicu s mjerenjima za svaku nit.

Tablica 2:
Određivanje λ laserske svjetlosti

Nit	Red. br.	d/m	a/m	s/m	λ/m	$\lambda' - \lambda_i$
	1.					
	2.					
	3.					
	4.					
	5.					

U Tablici 2, zbog veće zornosti prikaza analize mjerenja, dodan je i stupac za određivanje pojedinačnog odstupanja od srednje vrijednosti. Tablicu organiziranu poput Tablice 2 potrebno je napraviti za svaku nit posebno.

Od ukupno 6 bodova 2 se odnose na tablicu ili dvije zasebne tablice za određivanje veličine 'd' odabranih niti i zatim po 2 boda za dvije tablice za određivanje valne duljine laserske svjetlosti.

f) provedete račun pogreške i odredite srednju vrijednost za svaku nit, maksimalno pojedinačno odstupanje, maksimalnu relativnu pogrešku i navedete zapis točnog rezultata ……..… 6 bodova

Srednja vrijednost: $\overline{\lambda} = \Sigma \lambda_i / n$, n – broj mjerenja (2)

Apsolutna vrijednost maksimalnog pojedinačnog odstupanja:

$|\Delta \lambda_{max}|$ ~ prema λ_i (m)

Relativna maksimalna pogreška: $r_m = [(| \Delta \lambda_{max} | / \overline{\lambda}) \cdot 100] \%$ (3)

Zapis točnog rezultata: $\lambda = (\overline{\lambda} \pm \Delta \lambda_{max})$ m (4)

Pregledno i točno prikazane sve četiri tražene veličine – 3 boda za svaku nit, ukupno 6 bodova.

g) usporedite dobivene eksperimentalne rezultate za dvije različite niti ……………… 2 boda

Navesti dobivene srednje vrijednosti za prvu i drugu nit i odrediti razliku – 1 bod.
Usporediti maksimalna odstupanja ili relativnu maksimalnu pogrešku za obje niti – 1 bod.

Jedna od osnovnih karakteristika laserskog snopa jest koherentnost – rezultati dobiveni pomoću ogiba na dvije različite niti trebali bi biti približno jednaki, uz malu relativnu pogrešku.

h) usporedite dobivene eksperimentalne rezultate za dvije različite niti s poznatim intervalom valnih duljina za crvenu svjetlost …………..... 2 boda

Rezultati za valnu duljinu laserske svjetlosti priznaju se u granicama eksperimentalne pogreške (poželjno je: $r_m < 5\%$). Vrijednosti valnih duljina za klasične laserske pokazivače su:

- AlGaInP 'bolji' crveni laserski pokazivači: 635 nm
- najčešća valna duljina komercijalnih laserskih pokazivača: 650 nm
- AlGaInP 'jeftiniji/slabiji' crveni laseri: 670 nm

Potrebno je navesti interval valnih duljina za crvenu boju ili barem približnu vrijednost za najčešći crveni laser (od 630 do 680 nm) – 1 bod – i zatim usporediti tu vrijednost s rezultatima dobivenima za obje niti – 1 bod.

i) navedete što je utjecalo na preciznost mjerenja …………..... 2 boda

Navesti, na osnovi stečenog eksperimentalnog iskustva, minimalno dva utjecaja na preciznost mjerenja i što je učinjeno da se ti utjecaji smanje – *po 1 bod za svaki ispravno naveden i obrazložen utjecaj* (poput: precizno očitavanje pomoću pomične mjerke, problem pravilnog postavljanja elemenata, točno određivanje položaja niti zbog postolja…).

Ukupno: ………………………………………………………………………. **30 bodova**