Državno natjecanje iz fizike 2017/2018
Pula, 17. – 20. travnja 2018.

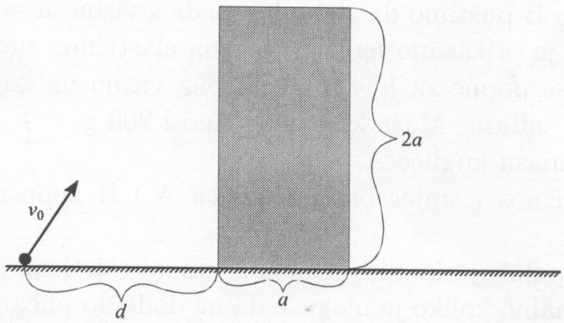
Srednje škole – 1. grupa

VAŽNO: Tijekom ispita **ne smijte imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule...)**. Za pisanje koristite kemijsku olovku ili nalivpero. **Pri ruci ne smijete imati mobitele ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.**

1. zadatak (17 bodova)

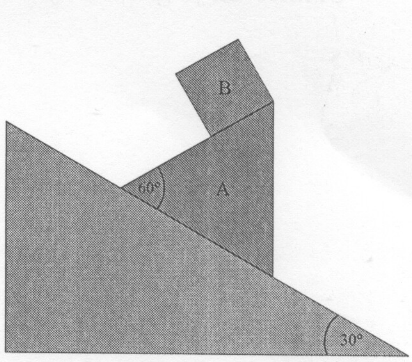
Čovjek se nalazi ispred zgrade oblika kvadra širine a i visine $2a$ i u ruci drži lopticu. Čovjek želi lopticu prebaciti preko zgrade dajući joj najmanju moguću početnu brzinu v_0. Pritom čovjek izbaci lopticu s udaljenosti d od zgrade takve da je ispunjen uvjet najmanje moguće brzine. Zanemarite visinu čovjeka, odnosno pretpostavite da je loptica izbačena s tla, kao što je prikazano na slici. Sve rezultate izrazite preko dvije poznate veličine: širina zgrade a i gravitacijsko ubrzanje g.

a) Izračunajte najmanji mogući iznos brzine v_0 takav da loptica prebaci zgradu.
b) Izračunajte udaljenost od zgrade d s koje čovjek treba baciti lopticu tako da je brzina v_0 najmanja moguća.
c) Izračunajte maksimalnu visinu koju postiže malo tijelo za vrijeme leta u odnosu na horizontalnu podlogu.



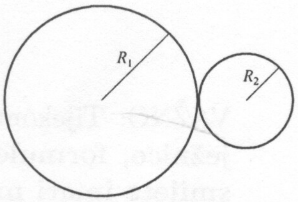
2. zadatak (18 bodova)

Na kosini nagiba 30° u odnosu na horizontalu nalazi se tijelo A, a na tijelu A se nalazi tijelo B (vidi sliku). Kosina je nepomična, dok se tijelo A može gibati po kosini, a tijelo B po tijelu A. Mase tijela A i B odnose se kao $m_A : m_B = 3 : 1$. Koeficijent trenja između tijela A i kosine iznosi $\sqrt{3}/4$, dok je trenje između tijela B i tijela A zanemarivo. U početnom trenutku sustav je pušten da se giba iz mirovanja.



a) Skicirajte sve sile koje djeluju na tijelo A i sve sile koje djeluju na tijelo B.
b) Izračunajte ubrzanje tijela A u referentnom sustavu kosine.
c) Izračunajte ubrzanje tijela B u referentnom sustavu tijela A.

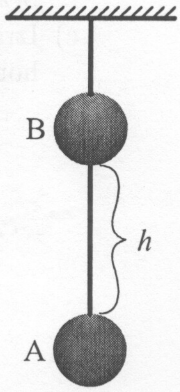
3. zadatak (17 bodova)



Dva valjka polumjera R_1 i R_2 ($R_1 > R_2$) stoje na svojim bazama na horizontalnoj podlozi. Na slici je prikazan početni položaj dva valjka. Valjak većeg polumjera miruje, a valjak manjeg polumjera se kotrlja bez klizanja po valjku većeg polumjera u smjeru kazaljke na satu. Kutna brzina rotacije manjeg valjka oko osi koja prolazi kroz njegovo središte iznosi 0.1π rad/s. Omjer polumjera valjaka je $R_1/R_2 = 2$.

a) Izračunajte koliko će okreta oko osi koja prolazi kroz njegovo središte (i koja se zajedno s njim pomiče) napraviti manji valjak dok se ne vrati u početni položaj.
b) Izračunajte vrijeme nakon kojeg će se manji valjak vratiti u početni položaj.
c) Neka je polumjer manjeg valjka 10 cm. Odredite i skicirajte vektor pomaka središta manjeg valjka nakon $\Delta t = 5$ s od početka gibanja. Odredite vektor srednje brzine translacije središta manjeg valjka po pomaku u istom vremenskom intervalu i izračunajte iznos te brzine.

4. zadatak (18 bodova)



Kuglica A pričvršćena je za elastičnu nit čiji je drugi kraj učvršćen za strop. Kuglica B duž svog promjera ima rupu kroz koju ju provučena elastična nit. U početnom trenutku kuglica A miruje u ravnotežnom položaju, a kuglicu B pustimo da slobodno pada s visine $h = 0.8$ m iznad kuglice A, kao što je prikazano na slici. Nakon elastičnog sudara s kuglicom A kuglica B se popne za $h/4$ u odnosu na visinu na kojoj se nalazi neposredno nakon sudara. Masa kuglice B iznosi 200 g.

a) Izračunajte masu kuglice A.
b) Izračunajte iznos i smjer brzine kuglica A i B neposredno nakon sudara.
c) U najnižem položaju kuglice A nakon sudara elastična nit je rastegnuta maksimalno koliko je moguće da ne dođe do pucanja niti. Ako elastična nit može izdržati maksimalno opterećenje od 18 N, izračunajte konstantu njezine elastičnosti k.

Uzmite da je gravitacijsko ubrzanje $g = 10$ m/s^2.

Državno natjecanje iz fizike 2017/2018
Pula, 17. – 20. travnja 2018.

Srednje škole – 1. grupa
Rješenja i smjernice za bodovanje

1. zadatak (17 bodova)

Iz uvjeta minimalne brzine v_0 takve da malo tijelo prebaci kvadar slijedi da smjer brzine malog tijela na gornjem lijevom rubu kvadra v' mora zatvarati kut 45° s horizontalom **(1 bod)** (vidi sliku 1) te da je iznos brzine v' takav da je doseg kosog hica iz te točke jednak širini kvadra a **(1 bod)**. Za gibanje malog tijela od lijevog gornjeg ruba do desnog gornjeg ruba kvadra u horizontalnom (x) i vertikalnom (y) smjeru vrijede jednadžbe:

$x(t) = v'_x t$, $y(t) = v'_y t - \frac{1}{2}gt^2$, **(2 boda)**

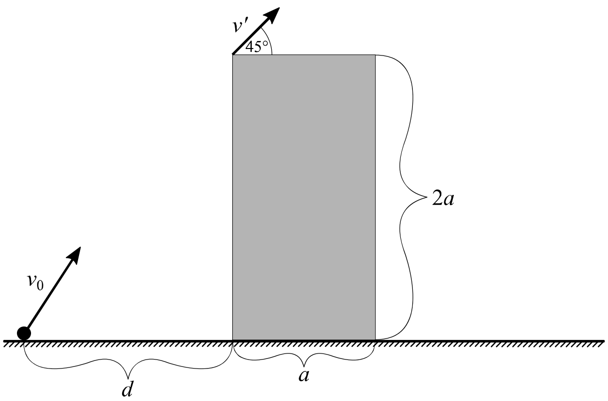
Uvrštavanjem zadanih uvjeta slijedi da je

$v'_x = v'_y = \frac{1}{\sqrt{2}}v'$, **(1 bod)**

$a = x(t') = \frac{1}{\sqrt{2}}v't' \Rightarrow t' = \frac{\sqrt{2}a}{v'}$, **(1 bod)**

$0 = y(t') = \frac{1}{\sqrt{2}}v't' - \frac{1}{2}gt'^2 = a - \frac{ga^2}{v'^2}$, **(1 bod)**

$v'^2 = ga \Rightarrow v' = \sqrt{ga}$. **(1 bod)**



Slika 1: Brzina malog tijela na gornjem lijevom rubu kvadra v' zatvara kut 45° s horizontalom.

Brzinu v_0 izračunamo pomoću zakona očuvanja energije:

$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg2a + \frac{1}{2}mv'^2$ **(1 bod)**

$v_0^2 = 4ga + ga = 5ga \Rightarrow v_0 = \sqrt{5ga}$ **(1 bod)**

Horizontalna komponenta brzine se ne mijenja za vrijeme leta te stoga vrijedi $v_{0x} = v'_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{ga}$. Vertikalnu komponentu brzine v_0 izračunamo na način:

$v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 \Rightarrow v_{0y}^2 = v_0^2 - v_{0x}^2 = 5ga - \frac{1}{2}ga = \frac{9}{2}ga \Rightarrow v_{0y} = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{ga}$ **(1 bod)**

Za gibanje malog tijela u horizontalnom (x) i vertikalnom (y) smjeru od točke izbačaja vrijede jednadžbe:

$x(t) = v_{0x}t$, $y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$.

Uvrštavanjem zadanih uvjeta slijedi:

$d = x(t_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{ga}t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{ga}}$, **(1 bod)**

$2a = y(t_1) = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{ga}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = 3d - \frac{d^2}{a}$, **(1 bod)**

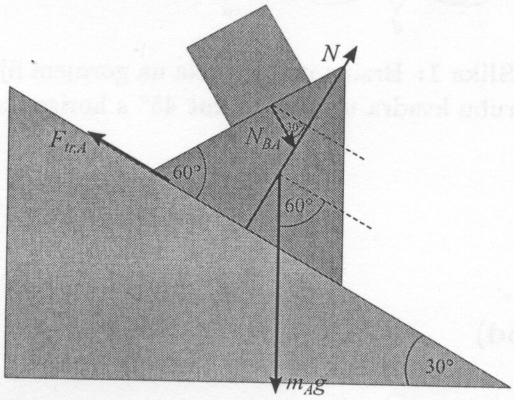
$0 = d^2 - 3ad + 2a^2 = (d-a)(d-2a)$.

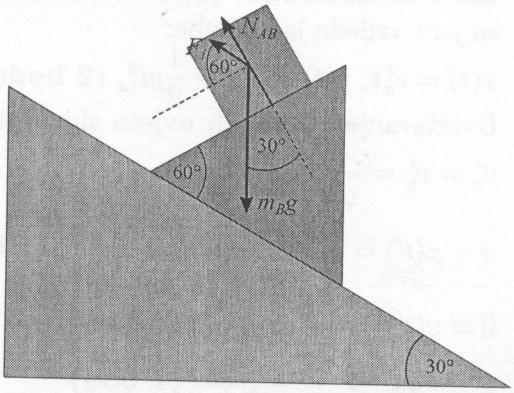
Rješenja jednadžbe su: $d_1 = a$ i $d_2 = 2a$. Rješenje, koje odgovara uvjetu zadatka, je $d = a$ **(2 boda)**.

Najvišu točku putanje dobijemo iz uvjeta da je vertikalna brzina jednaka nuli:
$v_y(t) = v_{0y} - gt,$
$0 = v_y(t_2) = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{ga} - gt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a}{g}}$, **(1 bod)**
$h_{max} = y(t_2) = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{ga}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = \frac{9}{2}a - \frac{9}{4}a = \frac{9}{4}a.$ **(1 bod)**

2. zadatak (18 bodova)

Na tijelo A u referentnom sustavu kosine djeluju četiri sile: sila teža $m_A\vec{g}$, sila reakcije podloge (kosine) $\vec{N}$, sila tijela B na tijelo A $\vec{N}_{BA}$ i sila trenja $\vec{F}_{tr,A}$. Sile na tijelo A prikazane su na slici 2, također su označeni kutevi pojedinih sila u odnosu na nagib kosine po kojoj se giba tijelo A. Na tijelo B u referentnom sustavu tijela A djeluju tri sile: sila teža $m_B\vec{g}$, sila tijela A na tijelo B $\vec{N}_{AB}$ i inercijala sila $\vec{F}_i$. Sile na tijelo B prikazane su na slici 2 desno, također su označeni kutevi pojedinih sila u odnosu na smjer gibanja tijela B. Dijagram sila na tijelo A: **(2 boda)**, dijagram sila na tijelo B: **(2 boda)**.





Slika 2: Sile na tijelo A u referentnom sustavu kosine (lijevo) i sile na tijelo B u referentnom sustavu tijela A (desno).

Drugi Newtonov zakon za tijelo A za smjer paralelan i okomit na kosinu glasi:
$m_A a_A = \frac{1}{2}m_A g + \frac{\sqrt{3}}{2}N_{BA} - F_{tr,A}$, **(1 bod)**
$0 = \frac{\sqrt{3}}{2}m_A g + \frac{1}{2}N_{BA} - N.$ **(1 bod)**
Drugi Newtonov zakon za tijelo B u referentnom sustavu tijela A za smjer paralelan i okomit na podlogu, po kojoj se tijelo B giba, glasi:
$m_B a_B = \frac{1}{2}m_B g + \frac{1}{2}F_i$, **(1 bod)**
$0 = \frac{\sqrt{3}}{2}m_B g - N_{AB} - \frac{\sqrt{3}}{2}F_i.$ **(1 bod)**
Sila trenja na tijelo A je $F_{tr,A} = \mu N$. **(1 bod)** Sila tijela A na tijelo B jednakog je iznosa sili tijela B na tijelo A prema trećem Newtonovom zakonu: $N_{AB} = N_{BA}$. **(1 bod)**
Inercijalna sila na tijelo B jednaka je: $F_i = m_B a_A$. **(1 bod)**
Sustav jednadžbi rješavamo tako da iz druge jednadžbe izrazimo silu reakcije podloge N:
$N = \frac{\sqrt{3}}{2}m_A g + \frac{1}{2}N_{BA}$
i uvrstimo u prvu jednadžbu zajedno s izrazom za silu trenja $F_{tr,A}$:

$m_A a_A = \frac{1}{2} m_A g + \frac{\sqrt{3}}{2} N_{BA} - \frac{\sqrt{3}}{2} \mu m_A g - \frac{1}{2} \mu N_{BA}$.
Nadalje uvrstimo koeficijent trenja μ i sredimo:
$m_A a_A = \frac{1}{8} m_A g + \frac{3\sqrt{3}}{8} N_{BA}$.
Zatim iz četvrte jednadžbe izrazimo silu tijela A na tijelo B N_{AB}:
$N_{BA} = N_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} m_B g - \frac{\sqrt{3}}{2} F_i$,
uvrstimo izraz za inercijalnu silu:
$N_{BA} = \frac{\sqrt{3}}{2} (m_B g - m_B a_A)$
i uvrstimo u jednadžbu za ubrzanje tijela A:
$m_A a_A = \frac{1}{8} m_A g + \frac{9}{16} (m_B g - m_B a_A)$
Nakon sređivanja:
$\left(m_A + \frac{9}{16} m_B \right) a_A = \frac{1}{8} \left(m_A + \frac{9}{2} m_B \right) g$.
Uvrštavanjem zadanog omjera masa tijela A i B $m_A/m_B = 3$ dobije se:
$\frac{19}{16} a_A = \frac{5}{16} g \;\Rightarrow\; a_A = \frac{5}{19} g$. **(6 bodova)**
Ubrzanje tijela B u referentnom sustavu tijela A dobije se uvrštavanjem u treću jednadžbu:
$m_B a_B = \frac{1}{2} m_B g + \frac{1}{2} m_B a_A$
$a_B = \frac{1}{2} (g + a_A) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{5}{19} \right) g = \frac{12}{19} g$. **(1 bod)**

3. zadatak (17 bodova)

Središte manjeg valjka za vrijeme jednog njegovog okreta oko osi, koja prolazi njegovim središtem, prijeđe put:
$l_1 = 2\pi R_2$. **(2 boda)**
Središte manjeg valjka, dok se ne vrati u početni položaj, prijeđe ukupan put:
$l_{ukupno} = 2\pi (R_1 + R_2)$. **(2 boda)**
Broj okreta manjeg valjka oko osi, koja prolazi njegovim središtem, dok se ne vrati u početni položaj jednak je omjeru ukupnog puta l_{ukupno} i puta za vrijeme jednog okreta l_1:
$n = \frac{l_{ukupno}}{l_1} = \frac{2\pi (R_1 + R_2)}{2\pi R_2} = \frac{R_1}{R_2} + 1 = 2 + 1 = 3$. **(1 bod)**
Vrijeme potrebno da manji valjak napravi jedan okret oko osi koja prolazi njegovim središtem:
$t_1 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.1\pi} = 20$ s. **(1 bod)**
Prema tome, vrijeme potrebno da manji valjak dođe u početni položaj iznosi:
$t = n t_1 = 3 t_1 = 60$ s. **(1 bod)**
Neka je ishodište koordinatnog sustava u središtu većeg valjka. U početnom trenutku položaj središta manjeg valjka opisan je vektorom:
$\vec{r}_1 = (R_1 + R_2)\,\hat{i} = (30\ \text{cm})\hat{i}$. **(1 bod)**
U vremenskom intervalu $\Delta t = 5$ s središte manjeg valjka je prešlo put:
$\Delta l = R_2 \Delta\theta = R_2 \omega \Delta t$ **(1 bod)**
te se zakrenuo oko središta većeg valjka za kut:

$$\Delta\theta' = \frac{\Delta l}{R_1 + R_2} = \frac{R_2 \omega \Delta t}{R_1 + R_2} = \frac{\omega \Delta t}{\frac{R_1}{R_2} + 1} = \frac{\omega \Delta t}{3} = \frac{0.1\pi \text{ rad/s} \cdot 5 \text{ s}}{3} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ. \textbf{ (2 boda)}$$

Položaj manjeg valjka nakon vremenskog intervala Δt prikazan je isprekidanom linijom na slici 3, a položaj njegovog središta može se opisati vektorom:

$\vec{r}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(R_1 + R_2)\,\hat{\imath} - \frac{1}{2}(R_1 + R_2)\,\hat{\jmath}$,

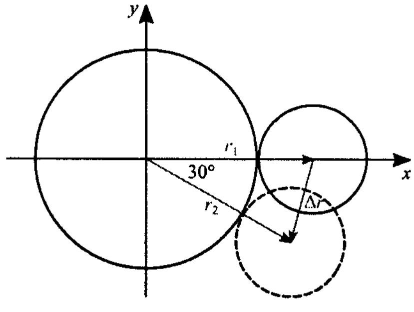
$\vec{r}_2 = (26 \text{ cm})\hat{\imath} + (-15 \text{ cm})\hat{\jmath}$. **(1 bod)**

Vektor pomaka središta manjeg valjka u vremenskom intervalu Δt iznosi:

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(-\frac{\sqrt{3} - 2}{2}\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath}\right)(R_1 + R_2)$,

$\Delta\vec{r} = (-4 \text{ cm})\hat{\imath} + (-15 \text{ cm})\hat{\jmath}$. **(1 bod)**

Skica vektora $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ i $\Delta\vec{r}$: **(2 boda)**.



Slika 3: Položaj manjeg valjka nakon vremenskog intervala Δt.

Srednja brzina translacije središta manjeg valjka po pomaku dana je izrazom:

$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(-4 \text{ cm})\hat{\imath} + (-15 \text{ cm})\hat{\jmath}}{5 \text{ s}} = (-0.8\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}) \text{ cm/s}$. **(1 bod)**

Iznos vektora $\bar{\vec{v}}$ je:

$|\bar{\vec{v}}| = \sqrt{0.8^2 + 3^2} \text{ cm/s} = 3.1 \text{ cm/s}$. **(1 bod)**

4. zadatak (18 bodova)

Brzina kuglice B neposredno prije sudara s kuglicom A može se izračunati pomoću zakona očuvanja energije:

$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \;\Rightarrow\; v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0.8 \text{ m}} = 4 \text{ m/s}$. **(2 boda)**

Za sudar kuglica A i B vrijedi zakon očuvanja količine gibanja:

$m_1 v_1 = -m_1 u_1 + m_2 u_2$, **(2 boda)**

gdje je u_1 iznos brzine kuglice B neposredno nakon sudara pri čemu je uzeto u obzir da je smjer brzine u_1 suprotan smjeru brzine v_1, a u_2 je brzina kuglice A neposredno nakon sudara. Za sudar vrijedi i zakon očuvanja energije:

$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$. **(1 bod)**

Iz zakona očuvanja količine gibanja izrazimo brzinu kuglice A neposredno nakon sudara:

$u_2 = \frac{m_1}{m_2}(v_1 + u_1)$

i uvrstimo u zakon očuvanja energije:

$m_1 v_1^2 = m_1 u_1^2 + m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2}(v_1 + u_1)^2$,

$v_1^2 - u_1^2 = \frac{m_1}{m_2}(v_1 + u_1)^2$,

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(v_1 - u_1)(v_1 + u_1)}{(v_1 + u_1)^2} = \frac{v_1 - u_1}{v_1 + u_1}$. **(2 boda)**

Brzinu kuglice B neposredno nakon sudara odredimo pomoću zakona očuvanja energije koristeći uvjet da se kuglica nakon sudara popne na $h/4$ visine:

$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = m_1 g \frac{h}{4} \;\Rightarrow\; u_1 = \sqrt{\frac{gh}{2}} = \frac{1}{2} v_1 = 2 \text{ m/s}$. **(1 bod)**

Uvrštavanjem brzine u_1 u izraz za omjer masa dobije se:

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow m_2 = 3m_1 = 600$ g. **(1 bod)**

Brzina kuglice A neposredno nakon sudara ima smjer prema dolje i iznosi:

$u_2 = \frac{m_1}{m_2}(v_1 + u_1) = \frac{1}{3}(4 \text{ m/s} + 2 \text{ m/s}) = 2$ m/s. **(1 bod)**

Za gibanje kuglice A nakon sudara s kuglicom B prema dolje vrijedi zakon očuvanja energije:

$\frac{1}{2}m_2u_2^2 + m_2g(l' - l) + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = \frac{1}{2}k(l' - l_0)^2$, **(2 boda)**

gdje je l_0 duljina nerastegnute niti, l duljina niti u početnom položaju i l' je duljina niti u konačnom položaju (vidi sliku 4). Budući da u početnom trenutku kuglica A miruje u ravnotežnom položaju, vrijedi:

$m_2g = k(l - l_0) \Rightarrow l - l_0 = \frac{m_2g}{k}$ **(1 bod)**

Uvrštavanjem u zakon očuvanja energije dobije se:

$\frac{1}{2}m_2u_2^2 + m_2g(l' - l) + \frac{1}{2}\frac{m_2^2g^2}{k} = \frac{1}{2}k\left(l' - l + \frac{m_2g}{k}\right)^2$,

$l' - l = \sqrt{\frac{m_2u_2^2}{k}}$. **(2 boda)**

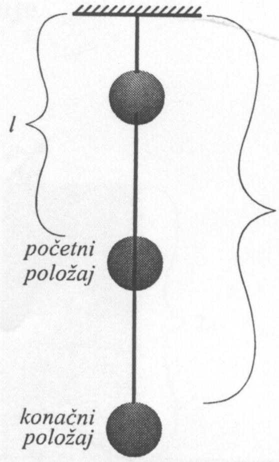
Uslijed maksimalnog opterećenja duljina elastične niti jednaka je l' te vrijedi:

$F_{max} = k(l' - l_0) = k(l' - l) + k(l - l_0) = \sqrt{km_2u_2^2} + m_2g$.
(2 boda)

Iz prethodne jednadžbe izračuna se konstanta elastičnosti niti:

$\sqrt{km_2u_2^2} = F_{max} - m_2g$

$$k = \frac{(F_{max} - m_2g)^2}{m_2u_2^2} = \frac{(18 \text{ N} - 0.6 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2)^2}{0.6 \text{ kg} \cdot 4 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 60 \text{ N/m}. \textbf{ (1 bod)}$$



Slika 4: Početni i konačni položaj kuglice A za njezino gibanje nakon sudara.

Državno natjecanje iz fizike, Pula, 17.-20. travnja 2018.

EKSPERIMENTALNI ZADATAK- 1. skupina

Određivanje faktora kinetičkog trenja metalne pločice i drvenog kvadra

Pribor: Drveni kvadar poznate mase M , uteg poznate mase m , metalna pločica poznate mase m_p , nit , stegač , metalna šipka , dinamometar , ravnalo

Zadatak :

1. Odredite faktor kinetičkog trenja između metalne pločice i drvenog kvadra

U sklopu zadatka treba:

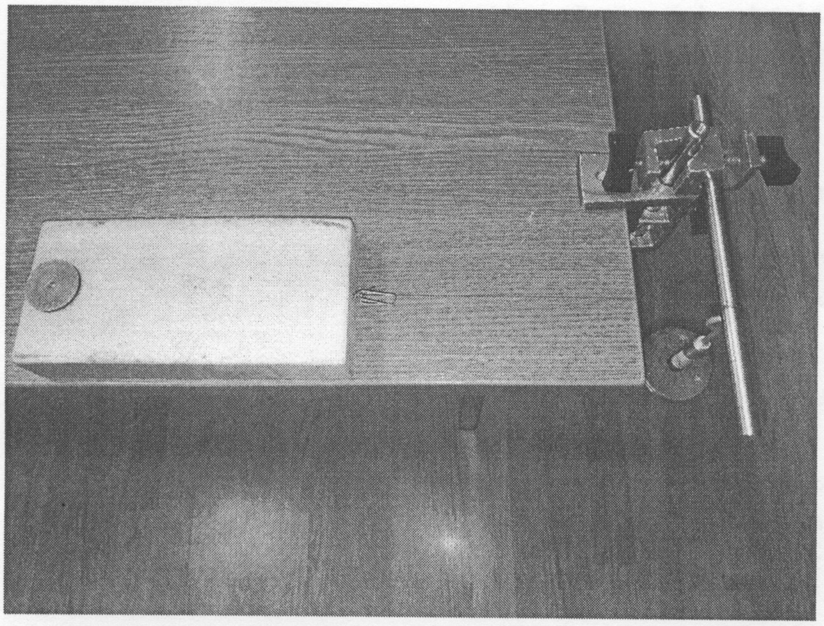
a) Objasniti teorijsku podlogu mjerenja (5 bodova)
b) Nacrtati odgovarajuće dijagrame sila (5 bodova)
c) Izvesti formulu kojom ćete pomoću izmjerenih veličina odrediti faktor kinetičkog trenja između metalne pločice i drvenog kvadra (10 bodova)
d) Napraviti 10 mjerenja , podatke prikazati tablično , odrediti srednju vrijednost faktora trenja i odstupanja od srednje vrijednosti , podatke prikazivati s odgovarajućim pouzdanim znamenkama (10 bodova).

Državno natjecanje iz fizike, Pula, 17.-20. travnja 2018.

RJEŠENJE EKSPERIMENTALNOG ZADATKA- 1. skupina

1. Određivanje faktora kinetičkog trenja između metalne pločice i drvenog kvadra

Pribor složimo prema slici.



Metalnu pločicu poznate mase m_p stavimo na drveni kvadar mase M .

Jedan kraj niti zavežemo za drveni kvadar , a za drugi kraj niti privežemo uteg mase m. Uteg prebacimo preko šipke i pustimo da pada. Dok uteg pada nit povlači kvadar koji se giba po površini stola.

Dok se kvadar giba po stolu pločica se giba zajedno sa kvadrom , odnosno miruje u odnosu na kvadar.

Budući da trebamo odrediti faktor kinetičkog trenja između pločice i kvadra potrebno je postići situaciju da se pločica giba po kvadru. To ćemo postići tako da kvadar nakon što je prevalio put s , rukom naglo zaustavimo. Pomoću ravnala možemo odrediti s. Pločica će se gibati usporeno po kvadru i pritom će pločica prevaliti udaljenost l. Ravnalom odredimo l.

Postavljamo jednadžbe gibanja za uteg i kvadar.

(1) $ma = mg - F_N$

(2) $(M + m_p)a = F_N - (M + m_p)g\mu_1$

, gdje su a ubrzanje sustava , g ubrzanje slobodnog pada , F_N napetost niti , a μ_1 faktor trenja između kvadra i stola.

Faktor trenja između kvadra i stola možemo odrediti tako da jedan kraj dinamometra pričvrstimo na drveni kvadar a drugi kraj povlačimo tako da se kvadar giba po stolu. Očitamo silu trenja F_{tr} i iz relacije $\mu_1 = \frac{F_{tr}}{(M+m_p)g}$ odredimo μ_1. Pri određivanju faktora trenja napravimo 10 mjerenja i odredimo srednju vrijednost.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE, PULA, 17.-20. travnja 2018

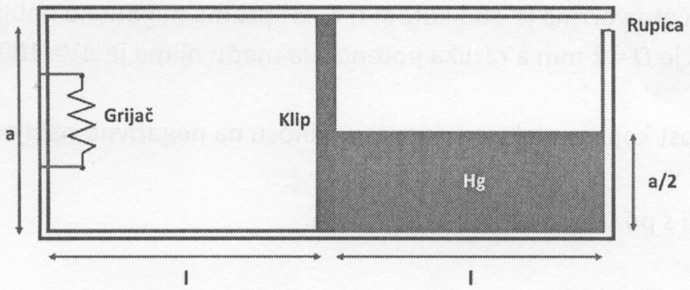
Zadaci - 2. skupina

VAŽNO: Tijekom ispita **ne smijete koristiti nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule...)**. Za pisanje koristite kemijsku olovku ili nalivpero. ***Pri ruci ne smijete imati mobitele ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora***.

1. zadatak (20 bodova)

Klip zanemarive debljine i mase, može se gibati bez trenja u cilindru kvadratnog presjeka u vodoravnome smjeru. Stjenke posude i klip izrađeni su tako da ne dozvoljavaju izmjenu topline kroz njih. Lijeva komora je ispunjena idealnim jednoatomnim plinom a desna komora je ispunjena živom do polovine visine. Desna komora je spojena s okolišem (atmosferski tlak) putem rupice na vrhu komore (vidi sliku).

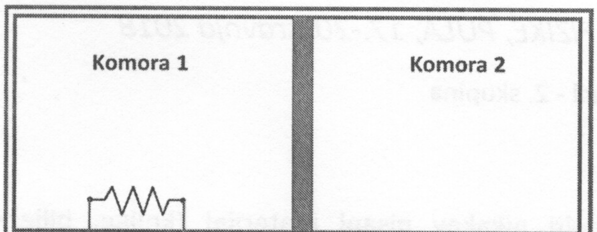
Duljina svake komore je l = 5,00 cm a visina a = 4,00 cm. Početna temperatura je 27°C. Plin se zagrije pomoću grijača u komori i klip istisne svu živu iz komore.



a. Znajući da je srednja vrijednost tlaka kojim živa djeluje na klip jednaka tlaku kojim živa djeluje na polovici svoje visine, nađite ovisnost tlaka plina o volumenu $p(V)$ u ravnoteži, prilikom promjene volumena V u komori u kojoj je grijač ($0 \leq V \leq V_{MAX}$).
b. Odredite temperaturu plina kada klip dođe do kraja posude.
c. Odredite rad plina u tom procesu.
d. Izračunajte toplinu prenijetu plinu putem grijača.

2. zadatak (15 bodova)

Zatvorena posuda podijeljena je u dvije komore sa klipom. Stjenke posude ne dopuštaju izmjenu topline s okolišem. Klip površine 500 cm^2 ne dopušta razmjenu topline između dvije komore i kliže se bez trenja (vidi sliku). Svaka komora sadrži V_0 = 40 L idealnog dvoatomnog plina pri tlaku p_0 = 1 atm i temperaturi T_0 = 0°C. Toplina se, pomoću grijača, predaje plinu u prvoj komori dok se početni tlak ne utrostruči u drugoj komori.



Kad je sustav u ravnoteži izračunajte:

a. Konačnu temperaturi u drugoj komori.
b. Konačnu temperaturu plina u prvoj komori.
c. Toplinu predanu plinu u prvoj komori.
d. Rad koji plin u prvoj komori obavi na plinu u drugoj.
e. Pomak klipa u odnosu na početni položaj.

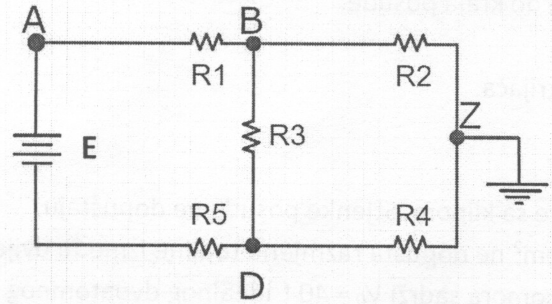
3. zadatak (15 bodova)

Elektron ulijeće brzinom $v_0 = 5{,}6\times10^6$ m/s u prostor između dvije dugačke paralelne ploče, od kojih je gornja pozitivno nabijena a donja negativno. Elektron ulijeće točno na polovici udaljenosti između ploča, a početna brzina je pod kutom $\alpha = 45°$ prema negativno nabijenoj ploči. Udaljenost između ploča je D = 2 mm a razlika potencijala među njima je ΔV= 100V. Odredite:

a. Kolika je najmanja udaljenost koju će elektron dostići u odnosu na negativno nabijenu ploču.
b. Gdje će se elektron sudariti s pozitivno nabijenom pločom.

4. zadatak (20 bodova)

Električni krug na slici spojen je u točki Z sa zemljom. Električne komponente od kojih se sastoji imaju sljedeće vrijednosti: E = 10V (unutarnji otpor je zanemariv), R_1 = 80 Ω, R_2 = 40 Ω, R_3 = 20 Ω, R_4 = 120 Ω, R_5 = 30 Ω. Izračunajte potencijal u točki A u odnosu na točki Z.



Vrijednosti konstanta:

ρ_{Hg} = 13,6 x 10³ kg/m³; P_{atm}= 1 atm = 101300 Pa; m_e = 9,10 × 10⁻³¹ kg; q_e = 1,60 × 10⁻¹⁹ C

g = 9,81 m/s2; R = 8,31 J/K mol.

Rješenja i smjernice za bodovanje – 2. skupina

1. Zadatak (20 bodova)

Ako se klip pomakne za količinu *x* nivo žive će se dignuti na nivo *b*.

a. Za tlak na polovici visine vrijedi:

$p_{1/2} = \frac{1}{4}\rho g a$ **(1 bod)**

Sila kojem djeluje zrak je:

$F = F_z + F_{Hg} = p_{atm}a^2 + \frac{1}{8}\rho g a^3$ **(1 bod)**

Koristeći položaj klipa *x* može se izraziti ovisnost volumena plina o visini žive.

$V = a^2(\mathrm{l} + x) \Rightarrow x = \frac{V}{a^2} - \mathrm{l}$ **(1 bod)**

Ako je $x < \mathrm{l}/2$ živa ne izlazi kroz rupicu sto znaci da se njen volumen ne mijenja.

$\frac{\mathrm{l}a^2}{2} = (\mathrm{l} - x)a\mathrm{b} \Rightarrow \mathrm{b} = \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{l}-x}\frac{a}{2} = \frac{1}{2-V/V_0}\frac{a}{2}$ **(1 bod)**

Gdje $V_0 = a^2$ početni volumen plina. Da bi se odredio izraz za tlak koristi se isti postupak ali uzimaju ci u obzir da visina žive doći će samo do *b*.

$p(V) = p_{atm} + \frac{1}{8}\rho g a\left(\frac{1}{2-V/V_0}\right)^2$ **(2 boda)**

Ako je $\mathrm{x} > \mathrm{l}/2$, odnosno $\mathrm{V} > 3/2\mathrm{V}_0$ živa počinje izlaziti kroz rupicu i tlak plina se održava konstantnim.

$p_1 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho g a$ **(2 boda)**

b. Konačna temperatura može se izračunati koristeći jednadžbu idealnog plina.

$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{\mathrm{p}_1V_1}{T_1}$ **(1 bod)**

$T_1 = T_0\frac{p_1V_1}{p_0V_0} = T_0\frac{p_{atm}+1/2\rho ga}{p_{\mathrm{atm}}+1/8\rho ga}\frac{2V_0}{V_0} = 612\mathrm{K} = 339°\mathrm{C}$ **(2 boda)**

c. Rad plina je zbroj rada koji plin mora obaviti spram vanjskog tlaka i tlaka žive.

Vanjski tlak je konstantan i vrijedi:

$W = p_{atm} \triangle V = p_{atm}V_0$ **(1 bod)**

Rad uzrokovan tlakom žive jednak je promjeni potencijalne energije žive prilikom premještanja njezinog centra mase do gornje rupice.

$W_2 = mg \triangle h = \rho\frac{la^2}{2}\mathrm{g}(a - a/4) = \frac{3}{8}\rho\mathrm{g}aV_0$ **(2 boda)**

Dakle, ukupni rad je:

$W = \left(p_{atm} + \frac{3}{8}\rho g a\right)V_0 = 8{,}26\, J$ **(2 boda)**

d. Znajući da da je plin jednoatomni, promjena unutarnje energije je:

$\triangle U = nC_V \triangle T = \frac{3}{2}p_1V_1 - \frac{3}{2}p_0V_0 = \frac{3}{2}V_0\left(p_{\mathrm{atm}} + \frac{7}{8}\rho\mathrm{g}a\right) = 12{,}7\ \mathrm{J}$ **(2 boda)**

Iz prvog principa termodinamike vrijedi da je razmijenjena toplina:

$Q = \triangle U + W = 21{,}0\ \mathrm{kJ}$ **(2 boda)**

2. Zadatak (15 bodova)

a. Radi se o adjabtskoj promjeni s γ = 7/5, dakle vrijedi:

$$p_0^{1-\gamma} T_0^{\gamma} = (3p_0)^{1-\gamma} T_B^{\gamma}$$ **(2 boda)**

Iz čega slijedi:

$$T_B = T_0 \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 273{,}15 \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{7}} = 373{,}9K$$ **(2 boda)**

b. Primjenom jednadžbe idealnog plina:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{3p_0(2V_0 - V_B)}{nR} = \frac{3T_0(2V_0 - V_0)}{V_0} = \frac{3T_0\left(2V_0 - \frac{nRT_B}{3p_0}\right)}{V_0} = 3T_0\left(2 - \frac{T_B}{3T_0}\right) = 1265K$$

(2 boda)

c. Primjenom prvog zakona termodinamike za obje komore.

$Q = W + \Delta U_1$

$0 = -W + \Delta U_2$ **(2 boda)**

Zbrajajući svaki dio jednadžbe dobiva se:

$Q = \Delta U_1 + \Delta U_2 = nc_V(T_A - T_0 + T_B - T_0) =$

$n\frac{5}{2}R(T_A + T_B - 2T_0) = \frac{5p_0V_0}{2T_0}(T_A + T_B - 2T_0) = \ 40{,}4\ kJ$ **(2 boda)**

d. Iz prvog zakona termodinamike slijedi nadalje:

$$W = Q - \Delta U_1 = Q - nc_V(T_A - T_0) = Q - \frac{5p_0V_0(T_A - T_0)}{2T_0} = Q - \frac{5}{2}p_0V_0\left(\frac{T_A}{T_0} - 1\right) = \ 3{,}70\ kJ$$

(2 boda)

e. Iz promjene volumena može se izračunati pomak klipa:

$$s = \frac{V_A - V_0}{S} = \frac{V_0 - V_B}{S} = \frac{V_0 - \frac{nRT_B}{p_A}}{S} = \ 43{,}5\ \text{cm}$$ **(3 boda)**

3. Zadatak (15 bodova)

Električno polje je usmjereno prema dole i njegova vrijednost je:

$E = \frac{\Delta V}{D}$ **(2 boda)**

Sila teže je zanemariva u odnos na električnu sili, dakle može se napisati:

$a_y = \frac{F_y}{m_e} = \frac{qE_y}{m_e} = +8{,}79 \times 10^{-15}\ m/s^2$ **(2 boda)**

a. U točki gdje je najmanja udaljenost od elektrona do nabijene ploče, brzina elektrona je nula. Dakle može se koristiti jednadžba gibanja:

$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y\Delta y$ **(2 boda)**

Gdje Δy je okomita udaljenost od početne točke.

$\Delta y = \frac{(v_o sin\alpha)^2}{2a_y} = -0{,}892\ mm$ **(2 boda)**

Najmanja udaljenost od donje ploče je:

$d = \frac{D}{2} + \Delta y = 0{,}108\, mm$ **(2 boda)**

b. Vrijeme potrebno elektronu da dostigne gornju ploče može se izračunati koristeći jednadžbu gibanja:

$\Delta y = v_{oy} t + \frac{1}{2} a_y t^2$ **(2 boda)**

Gdje se za Δy = 1 mm dobiva t = $1{,}06 \times 10^{-9}$s

Iz toga proizlazi daje horizontalna udaljenost od početne točke:

$\Delta x = v_{0x} t = 4{,}39\, mm$ **(3 boda)**

4. Zadatak (12 bodova)

U čvoru B vrijedi:

$I = I_2 + I_3$ **(1 bod)**

Međutim u D vrijedi:

$I = I_4 + I_3$ **(1 bod)**

Iz toga slijedi da:

$I_4 = I_2$ **(1 bod)**

Sto znaci da su otpornici R_2 i R_4 kao jedna grana otpornika u paralelu sa R_3.

Ekvivalentni strujni krug je:

$\frac{1}{R_{BD}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2 + R_4} \Rightarrow R_{BD} = 17{,}8\Omega$ **(2 boda)**

Slijedi da:

$I = \frac{E}{R_1 + R_{BD} + R_5} = 78{,}2\, mA$ **(2 boda)**

Nadalje vrijedi:

$V_B - V_D = R_3 I_3 = R_2 I_2 + R_4 I_4 = I_2 (R_2 + R_4)$ **(2 boda)**

Iz čega:

$I_3 = I_2 \frac{R_2 + R_4}{R_3}$ **(2 boda)**

Vrijedi:

$I = I_3 + I_2 = I_2 \frac{R_2 + R_3 + R_4}{R_3}$ **(2 boda)**

Odnosno:

$I_2 = I \frac{R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = 8{,}68\, mA$ **(2 boda)**

$I_3 = I_2 \frac{R_2 + R_4}{R_3} = 69{,}6\, mA$ **(2 boda)**

Tada se mogu izračunati vrijednosti napona.

$V_B - V_T = V_B = R_2 I_2 = 0{,}347V$ **(1 bod)**

$V_A - V_B = I R_1$ **(1 bod)**

Slijedi:

$V_A = I R_1 + V_B = 6{,}61V$ **(1 bod)**

Eksperimentalni zadatak – 2. skupina

Električna otpornost materijala (ρ) i unutarnji otpor (r) izvora struje

Zadatak

- Odrediti električnu otpornost ρ materijala od kojeg je načinjena priložena žica te unutarnji otpor r izvora struje, **grafičkom metodom** (druge metode, npr. rješavanje sustava jednadžbi će se bodovati s manjim brojem bodova)

Pribor

- žica napravljena od materijala čiju električnu otpornost ρ treba odrediti
- baterija 4,5 V
- ampermetar (ako je priložen multimetar – smije se koristiti samo kao ampermetar)
- 3 žice za spajanje
- 4 krokodila
- milimetarski papir
- plastična cjevčica
- samoljepljiva traka
- ravnalo s mjernom skalom

U sklopu zadatka treba:

1. Nacrtati strujni krug pomoću kojeg će se vršiti mjerenja (2 boda)
2. Teorijski obrazložiti postupak mjerenja i određivanja električne otpornosti ρ materijala od kojeg je načinjena priložena žica te unutarnjeg otpora r izvora struje: opisati koje veličine ćete mjeriti i kako, izvesti odgovarajuće jednadžbe, obrazložiti kako ćete rezultate mjerenja prikazati grafički (**treba biti linearna funkcija**) da bi pomoću grafa odredili električnu otpornost ρ i unutarnji otpor r izvora struje (9 bodova)
3. Napraviti najmanje 10 mjerenja i rezultate prikazati tabelarno (5 bodova)
4. Rezultate prikazati grafički na milimetarskom papiru (**linearna funkcija**) (5 bodova)
5. Pomoću grafa odrediti električnu otpornost ρ materijala (6 bodova)
6. Pomoću grafa odrediti unutarnji opor r izvora struje (3 boda)

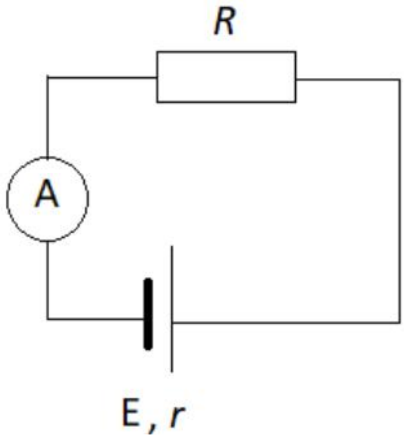
Ukupno eksperimentalni zadatak 30 bodova

Rješenje eksperimentalnog zadatka - 2. skupina

Električni otpor žice R određen je jednadžbom:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$ (1) (1 bod)

gdje je ρ električna otpornost materijala od kojeg je žica napravljena, l je duljina žice i S je površina njezinog presjeka. Napravimo strujni krug kao što je prikazano na crtežu.



Znači, na bateriju elektromotornog napona E = 4.5 V pomoću spojnih žica spojimo serijski žicu čiju električnu otpornost ρ mjerimo i ampermetar. Ta žica je u strujnog krugu naznačena kao otpor R. Za taj strujni možemo napisati drugi Kirchhoffov zakon:

$$\mathrm{E} = IR + Ir ,$$ (2) (2 boda)

gdje je E elektromotorni napon izvora (baterije), I jakost električne struje, r unutarnji otpor izvora, a je R vanjski otpor kruga tj. otpor žice čiju otpornost mjerimo. U ovim razmatranjima zanemarujemo otpor spojnih žica.

Uvrštavanjem izraza (1) u jednadžbu (2) dobivamo:

$$\mathrm{E} = I\rho \frac{l}{S} + Ir$$ (3) (2 boda)

Dijeljenjem jednadžbe (3) s I dobivamo linearnu ovisnost veličine $\frac{\mathrm{E}}{I}$ o duljini žice l: (crtež – 2 boda)

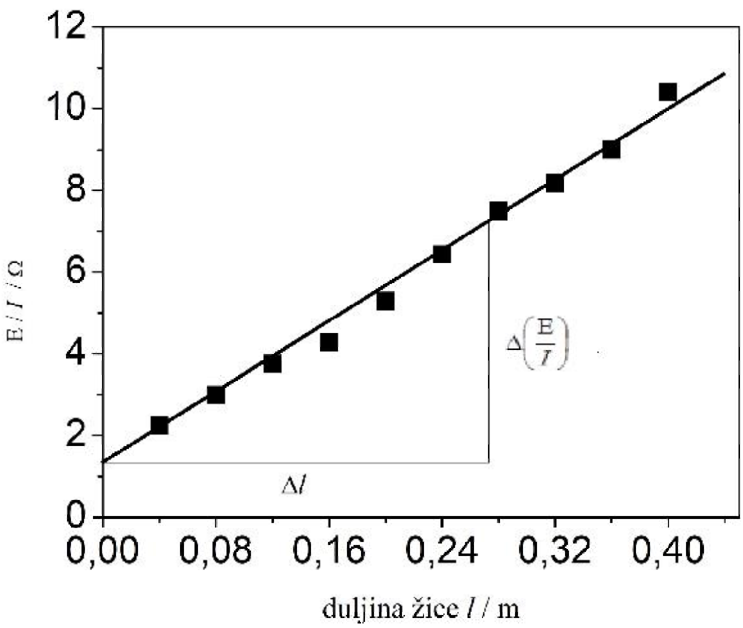
$$\frac{\mathrm{E}}{I} = \frac{\rho}{S} l + r$$ (4) (2 boda)

Mjerenja vršimo tako da mijenjamo vanjski otpor mijenjajući duljinu l otporne žice i za svaku duljinu otporne žice ampermetrom izmjerimo jakost električne struje I u krugu. Da bismo grafičkom metodom odredili električnu otpornost ρ materijala od kojeg je otporna žica napravljena i unutarnji otpor izvora r pomoću izmjerenih podataka, grafički ćemo prikazati ovisnost $\frac{\mathrm{E}}{I}$ o l. (2 boda)

Napravimo 10 mjerenja, podatke prikažemo tabelarno i na milimetarskom papiru nacrtamo graf ovisnosti $\frac{\mathrm{E}}{I}$ o l.

Br. mj.	l / m	I / A	$\frac{\mathrm{E}}{I}$ / Ω
1.	0.04	2	2,25
2.	0.08	1.5	3
3.	0.12	1.2	3,75
4.	0.16	1.05	4,29
5.	0.20	0.85	5,29
6.	0.24	0.70	6,43
7.	0.28	0.6	7,5
8.	0.32	0.55	8,18
9.	0.36	0.5	9
10.	0.40	0.4	10,47

(5 bodova)



(5 bodova)

Nagib toga grafa je gdje je $\dfrac{\Delta\left(\dfrac{E}{I}\right)}{\Delta l}$, a prema jednadžbi (4) taj nagib je $\dfrac{\rho}{S}$, pa izjednačavanjem dobivamo:

$$\rho = \frac{\Delta\left(\frac{E}{I}\right)}{\Delta l}\cdot S = \frac{\Delta\left(\frac{E}{I}\right)}{\Delta l}\cdot {r_S}^2\pi$$

gdje je r_S radijus presjeka žice čiju otpornost određujemo. Da bi odredili radijus r_S namotamo N = 10 do 15 namotaja žice plastičnu cjevčicu (moramo paziti da namotaji budu složeni točno jedan do drugoga), zatim izmjerimo širinu takve zavojnice x. Sada je polumjer presjeka žice: $r_S = \dfrac{x}{2N}$. (4 boda)

Pomoću grafa i izmjerenih podataka dobije se:

$$\frac{\Delta\left(\frac{E}{I}\right)}{\Delta l} \approx 22\ \frac{\Omega}{m}, \qquad r_S = 0{,}1\ \text{mm} \ \Rightarrow \qquad \rho \approx 7{,}9\cdot 10^{-7}\ \Omega\text{m}$$ (2 boda)

Unutarnji otpor izvora: $r = 1.3\ \Omega$. (3 boda)

Državno natjecanje iz fizike, Pula, 17.-20. travnja 2018.
Zadaci – 3. skupina

Zadatak 1 (16 bodova)

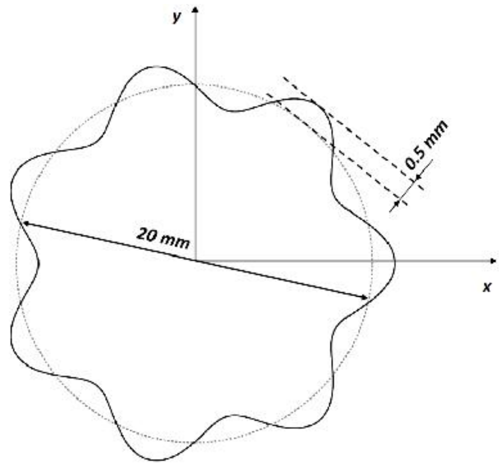
Na tankom prstenu radijusa $R = 10$ mm se formira transverzalni stojni val kao na slici. Valnu jednadžbu možemo zapisati kao udaljenost prstena od središta u ovisnosti o vremenu t i kutu φ:

$$r(t, \varphi) = R + a\cos(kR\varphi)\cos(\omega t)$$

a) Iako ovaj val nema rub, i dalje postoji jedan uvjet koji određuje njegove prirodne frekvencije titranja. Napiši općenito koje su vrijednosti valnog broja k dozvoljene i nađi najmanji k.

b) Nađi vrijednost parametara a i k koji odgovaraju stojnom valu sa slike.

c) Stojni val je nastao na prstenu interferencijom dva 'ravna' vala koji su se gibali u suprotnim smjerovima. Nađi faznu brzinu tog jednog vala u prstenu ako je za dani k iz (b) frekvencija $f = 540$ kHz.



Zadatak 2 (15 bodova)

Avionski radar prati avion. Radar radi tako da odašilje kratki puls elektromagnetskog zračenja frekvencije $f = 2.4$ GHz. Puls putuje od radara, udara u avion ili neki drugi objekt u zraku i odbija se natrag. Radar zabilježi položaj iz kojeg se vratio puls, koliko je prošlo između odašiljanja i povratka pulsa, te frekvenciju povratnog pulsa. Nakon odaslanog pulsa isti se vratio pod kutem od $\alpha = 20^\circ$ u odnosu na horizontalu, nakon $\tau = 0.2$ ms, sa frekvencijom koja je viša za $\Delta f = 3.8$ kHz.

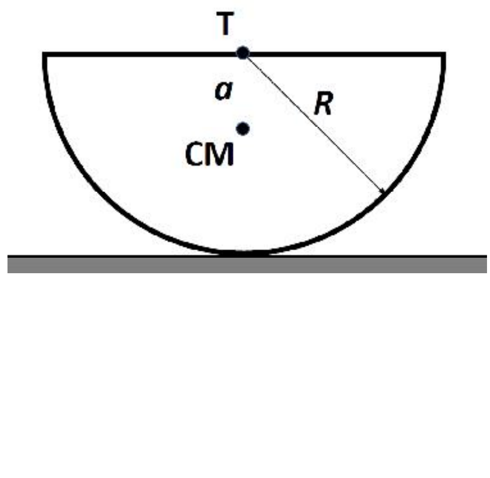
Nađi visinu aviona H, horizontalnu udaljenost aviona D i brzinu aviona $\vec{v}$, ako znamo da je brzina horizontalna (avion leti na istoj visini, ne spušta se i ne diže).

Napomena: Promjena frekvencije se promatra u istom referentnom sustavu (radar), stoga ne treba koristiti nikakve relativističke formule! Brzina elektromagnetskog zračenja je $c = 3 \cdot 10^8$.

Zadatak 3 (19 bodova)

Poluvaljak mase m i radijusa R kao na slici stoji na stolu. Centar mase poluvaljka (CM) je udaljen $a = \frac{4R}{3\pi}$ od točke T središta ravne plohe. Nađi period malih oscilacija tog poluvaljka. Iskoristi aproksimaciju malih kuteva:

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

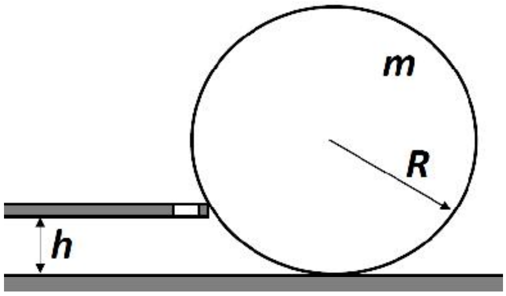


Zadatak 4 (20 bodova)

Monika udara biljarsku kuglu štapom na visini $h = R/5$. Tik nakon udara, kugla se počne gibati (bez odskakanja) tako da joj brzina centra mase iznosi $v_0 = 0.5$ m/s. Bilijarska kugla ima masu $m = 0.2$ kg i promjer $d = 50$ mm.

a) Nađi brzinu rotacije kugle ω_0 iz sustava centra mase kugle tik nakon Monikinog udara!
b) Nađi brzinu centra mase $v(t)$ i kutnu brzinu iz sustava centra mase $\omega(t)$ tokom cijelog gibanja. Skiciraj $\omega - t$ i $v - t$ grafove! Koja je konačna brzina kugle?

Koeficijent trenja dodirne točke kugle i stola je $\mu = 0.03$ a moment inercije kugle je $I = \frac{2}{5}mR^2$. Trenje kotrljanja zanemarujemo.



VAŽNO:
Tijekom ispita ne smijete imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule...). Za pisanje koristite kemijsku olovku ili nalivpero. Pri ruci ne smijete imati mobitele ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

Državno natjecanje iz fizike, Pula, 17.-20. travnja 2018.
Rješenja i smjernice za bodovanje – 3. skupina

Zadatak 1 (16 bodova)

a) Ono što mora vrijediti za val na kružnom prstenu jest da kada napravimo puni krug ($\varphi = 2\pi$) valna funkcija ima isti oblik (tzv. kružni uvjet, za razliku od rubnog uvjeta). Postavljamo:

$$r(t, \varphi) = r(t, \varphi + 2\pi)$$

Ovaj uvjet se svodi na jednakost kosinusa (jer jedino on ovisi o φ):

$$\cos(kR\varphi) = \cos(kR\varphi + 2kR\pi)$$

Zaključujemo da mora vrijediti:

$$2kR\pi = 2n\pi \; ; n \in \mathbb{N}$$

(4 boda)

Dozvoljena veličina valnog broja $k = n/R$, a minimalni $k = 1/R = 100\ \mathrm{m}^{-1}$. **(2 boda)**

b) Iščitavajući jednadžbu, vidimo da val oscilira oko radijusa R, amplitudom a, pa je $a = 0.5$ mm. **(2 boda)**

Slično, iz općenitog oblika za veličinu k možemo zaključiti da je broj n ujedno i broj "grba" vala, pa iz slike vidimo $n = 7$, tj. $k_7 = 700\ \mathrm{m}^{-1}$ **(4 boda)**

c) Fazna brzina vala c se može naći iz relacije $\omega = ck$. Imamo $c = 2\pi f/k = 4\,847$ m/s. **(4 boda)**

Zadatak 2 (15 bodova)

Elektromagnetsko zračenje se širi kroz prostor brzinom svjetlosti. Ako je puls odaslan, odbijen od aviona i vratio se za τ, tada je udaljenost od radara do aviona:

$$2L = c\tau$$

(2 boda)

Faktor 2 je stoga što je puls morao doći do aviona i potom se vratiti. Iz ove relacije imamo $L = 30$ km. **(2 boda)**

Budući da poznajemo kut pod kojim radar vidi avion, možemo zamisliti pravokutni trokut gdje je hipotenuza L zračna udaljenost od aviona, a H i D su dvije katete, jedna je horizontalna udaljenost a druga visina aviona. Trigonometrijskim relacijama imamo:

$$H = L \sin\alpha = 10.3 \text{ km}$$

$$D = L \cos\alpha = 28.2 \text{ km}$$

(3 boda)

Brzinu aviona možemo dobiti iz dopplerovog efekta. Budući da se radi o odbijanju signala i povratku nazad, vrijedi ukupna relacija **(3 boda)**

$$f_1 = \frac{c+v}{c-v} f_0$$

Brzina je projekcija ukupne brzine aviona na pravac koji spaja avion s radarom: $v = v_A \cos\alpha$. **(2 boda)**

Izraz reorganiziramo:

$$v_A \cos\alpha = \frac{f_1 - f_0}{f_0 + f_1}\, c$$

(2 boda)

Konačno, $v_A = 253\,\mathrm{m/s} = 910\,\mathrm{km/h}$. **(1 bod)**

Zadatak 3 (19 bodova)

Za naći period oscilacija krutog tijela prvo je potrebno naći njegov moment tromosti oko točke rotacije. Ono što znamo je teorem o paralelnim osima s kojim možemo odrediti bilo koji moment u odnosu na moment centra mase. Drugo što znamo je moment tromosti oko točke T, budući da je ta točka ujedno i središte punog valjka.

$$I_T = \frac{1}{2} I_{valj} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(2m)R^2 = \frac{1}{2} mR^2$$

Iskoristili smo činjenicu da bi puni valjak imao duplo veću masu. **(2 boda)**

Sada pišemo iz teorema o paralelnim osima: **(2 boda)**

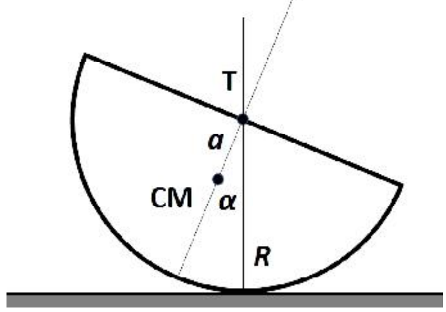
$$I_T = I_{CM} + ma^2 \Rightarrow I_{CM} = I_T - ma^2$$

Poluvaljak se rotira oko točke s kojom dodiruje tlo (točka P). Drugi put koristimo teorem o paralelnim osima za: **(2 boda)**

$$I_P = I_{CM} + m(R-a)^2 = I_T - ma^2 + m(R-a)^2 = I_T + mR^2 - 2maR$$

Konačno, $I_P = mR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)$. **(2 boda)**

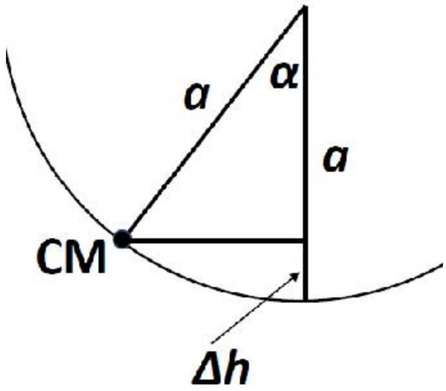
Za period oscilacija moramo promotriti što se događa pri malom pomaku poluvaljka. Najlakše je promatrati ukupnu energiju poluvaljka koja je jednaka zbroju kinetičke rotacijske energije E_{rot} i gravitacijsko potencijalne energije centra mase E_G.



Uzmimo da je u ravnoteži centar mase na visini $h = 0$. Ako pomaknemo tijelo za kut α, kao na slici, centar mase se podigne za visinu Δh, koja se nađe iz trigonometrije:

$$\Delta h = a - a\cos\alpha$$

(2 boda)



Koristeći aproksimacije malih kuteva, slijedi da je energija

$$E_G = mg\Delta h = mg(a - a + a\frac{\alpha^2}{2})$$

(2 boda)

Ukupna energija je tada:

$$E = \frac{1}{2}I_P\omega^2 + \frac{1}{2}mga\alpha^2$$

(2 boda)

Ovaj oblik energije možemo usporediti s energijom harmoničkog oscilatora

$$E_{HO} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

gdje je kružna frekvencija dobivena iz $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Na sličan način tražimo kutnu frekvenciju našeg oscilatora:

$$\omega^2 = \frac{mga}{I_P} = \frac{mg4R}{3\pi mR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)} = \frac{4}{3\pi\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)}\frac{g}{R}$$

(3 boda)

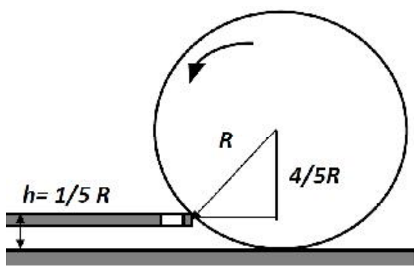
Period je sada: **(2 boda)**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(9\pi - 16)R}{8g}}$$

Zadatak 4 (20 bodova)

a) Prilikom udarca štapa u kuglu štap preda kugli količinu gibanja jednaku $p = mv_0$, gdje je v_0 početna brzina gibanja kugle nakon udara štapom.
Ujedno preda kugli i kutnu količinu gibanja koja će uzrokovati rotaciju obrnutu od smjera gibanja (slika). **(2 boda)**
Za kutnu količinu gibanja vrijedi

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = Rmv_0 \sin\alpha$$



gdje je smjer "iz papira", a kut α se dobije iz pravokutnog trokuta na slici da je $\sin\alpha = \frac{4R/5}{R} = 4/5$. **(2 boda)**

Stoga je predana kutna količina gibanja:

$$L = \frac{4}{5} R m v_0$$

Iz poznavanja momenta tromosti kugle $I = \frac{2}{5} m R^2$, kružna brzina ω je:

$$I\omega_0 = L \;\; ; \;\; \omega_0 = \frac{2v_0}{R} = 40 \text{ rad/s}$$

(4 boda)

b) Da bi znali kako će se kugla gibati moramo promotriti dodirnu točku kugle sa tlom da bi odredili smjer sile trenja. Brzina dodirne točke kugle u odnosu na tlo jednaka je zbroju brzine centra mase kugle v i obodne brzine ωR: **(2 boda)**

$$v_T = v + \omega R$$

U početnu je jasno smjer sile trenja prema lijevo (jer se obje brzine zbrajaju u desno). To uzrokuje usporavanje linearnog i rotacijskog gibanja kugle: **(2 boda)**

$$ma = -F_{tr} \;\; ; \;\; I\alpha = -RF_{tr}$$

Za brzinu imamo:

$$v(t) = v_0 - \mu g t$$

Za kutnu brzinu imamo:

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{5\mu g}{2R} t$$

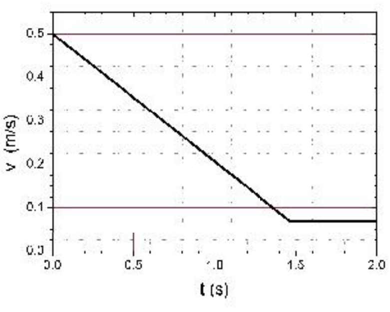
Pa možemo izraziti i obodnu brzinu:

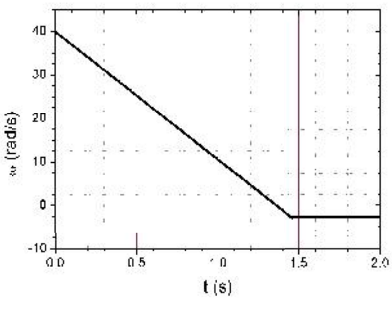
$$v_T(t) = R\omega_0 + v_0 - \frac{7}{2}\mu g t$$

(3 boda)

Kako vrijeme prolazi brzina v i ω linearno padaju do trenutka $\tau = 1.46$ s, kada je obodna brzina $v_T(\tau) = 0$. U tom trenu nema djelovanja sile trenja i nastupa kotrljanje bez proklizavanja. **(3 boda)**

Konačna brzina je $v(\tau) = 7.14 \cdot 10^{-2}$ m/s. **(2 boda)**





Državno natjecanje iz fizike
Pula, 17.-20. travnja 2018.

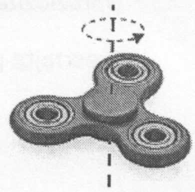
EKSPERIMENTALNI ZADATAK

3. skupina

1. dio

Pribor: metalni L profil (stalak), stegač, vijak M5, 6 matica i 4 podloška M5, (plastični vijak M8, 2 plastične matice), drvena letvica sa kugličnim ležajem i rupom promjera 8 mm, mjerna traka, (kutomjer), ″fidget spinner″, zaporni sat, vaga, gumena traka.

Na slici je prikazana popularna igračka ″fidget spinner″ ili vrtjelica. Ovaj model se sastoji od tri kraka i središta sa kugličnim ležajem koji omogućuje rotaciju igračke. Ležajevi pri vrhovima krakova su dodatne mase. Dodane su i kuglice ležajeva.



Zadatak. Pomoću zadanog pribora odredite moment tromosti vrtjelice s obzirom na os rotacije koja prolazi okomito kroz njezino središte, prikazano na slici. Moment tromosti treba odrediti uz što je više moguća pojednostavljenja.

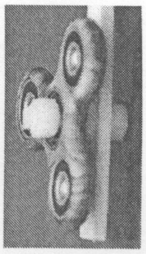
Obrazložite koja su to pojednostavljenja i zašto se primjenjuju.

Opišite kako su mjerenja izvedena, koje ste fizikalne zakonitosti primijenjivali, koje fizikalne veličine mjerili kako bi sa zadanim priborom odredili moment tromosti vrtjelice.

Rezultate mjerenja prikažite tablično. Procijenite točnost mjerenja.

2. dio

Na drvenu letvicu sa kugličnim ležajem i rupom promjera 8 mm pričvrstite vrtjelicu pomoću plastičnog vijka. Postavite letvicu s vrtjelicom tako da se letvica njiše u vertikalnoj ravnini, oko osovine koja prolazi okomito kroz kuglični ležaj. Odredite period takvog njihala za dva slučaja: a) kada vrtjelica može rotirati oko plastičnog vijka i b) kada ste pomoću gumene vrpce onemogućili rotaciju vrtjelice oko plastičnog vijka.



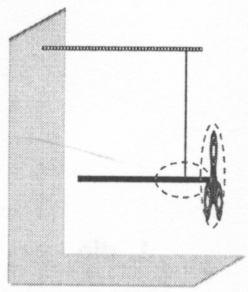
Zadatak. Opišite i obrazložite opažanja u slučajevima kada za vrijeme njihanja vrtjelica može rotirati oko osi koja prolazi okomito kroz njezino središte i kada ona ne može rotirati. Rezultate prikažite tablično i procijenite točnost svojih mjerenja.

3. dio

Pribor: metalni L profil (stalak), stegač, navojna šipka promjera 5 mm, 4 matice i 2 podloška M5, nit konca, mjerna traka, fidget spinner, zaporni sat, vaga, šipka (drvena ili aluminijska) promjera 8 mm, vrtilo i kukica.

U prvom dijelu odredili ste moment tromosti ″fidget spinnera″, ovaj podatak će vam biti potreban u nastavku zadatka. Postavite vrtjelicu pažljivo na jedan kraj šipke promjera 8 mm tako da se ne može pomicati duž šipke.

Zavežite konac na šipku. Drugi kraj konca sa vrtilom i kukicom zakačite na kraj navojne šipke koju ste prethodno učvrstili na metalni L profil.

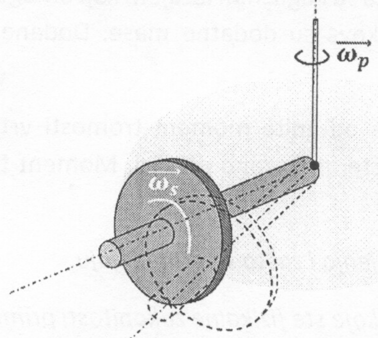


Nakon što ste zarotirali vrtjelicu oko osovine koja prolazi njezinim središtem, ovješena vrtjelica nastavi rotirati (precesija) i oko niti koja je učvršćena na svojem gornjem kraju. Precesija se mora koliko god je to moguće odvijati u horizontalnoj ravnini.

Zadatak. Vaš je zadatak u ovom dijelu, da na osnovu daljnjih mjerenja i poznatog momenta tromosti iz prvog dijela zadatka, odredite potreban broj okretaja vrtjelice kako bi ona izvodila precesijsko gibanje u horizontalnoj ravnini.

Obrazložite pomoću kojih fizikalnih veličina ćete izraziti kutnu brzinu precesije?

Precrtajte priloženi crtež. Pojednostavljenja radi umjesto vrtjelice nacrtan je disk.



Označite smjerove rotacija. Kao se smjerovi rotacija međusobno odnose?

Označite i imenujte na slici fizikalne veličine pomoću kojih ćete doći do jednadžbe u koju ćete uvrstiti svoje mjerne podatke kako bi odredili kutnu brzinu precesije. Ako se radi o vektroskim veličinama, označite i raspravite njihove smjerove!

Ukratko objasnite i sve fizikalne zakonitosti koje ste primjenjivali.

Raspravite rezultate svojih mjerenja. Opišite svoja opažanja uz izvođenje mjerenja.

Razmislite o poboljšanju eksperimentalne metode određivanja momenta tromosti vrtjelice i predložite neku drugu mogućnost mjerenja.

Državno natjecanje iz fizike
Pula, 17.-20. travnja 2018.

RJEŠENJE EKSPERIMENTALNOG ZADATKA

3. skupina

1. dio

U našem zadatku se radi o geometrijski složenom tijelu i njegov moment tromosti se određuje eksperimentalno, pomoću fizičkog njihala koje se njiše u vertikalnoj ravninini oko horizontalne osi koja ne prolazi njegovim težištem. Fizičko njihalo je svako kruto tijelo koje ima učvršćenu os rotacije oko koje može njihati pod utjecajem momenta gravitacijske sile.
Ako je os rotacije pomaknuta za *d* od težišta fizičkog njihala onda je period titranja njihala dan izrazom:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\ ,$$

gdje je ***I*** moment tromosti za danu os, ***m*** masa tijela, ***g*** akceleracija slobodnog pada i ***d*** udaljenost od težišta do osi rotacije. Iz te formule proizlazi da je moment tromosti fizikalnog njihala, s obzirom na horizontalnu os jednak:

$$\boldsymbol{I = \frac{mgdT^2}{4\pi^2}}$$

Mjerenjem perioda njihanja, mase tijela, određivanjem težišta tijela i mjerenjem udaljenosti između težišta i ovjesišta možemo odrediti moment tromosti tijela.

1 bod

Poučak o paralelnim osima (Steinerov poučak) omogućuje računanje momenta tromosti za bilo koju paralelnu os ako je poznat moment inercije s obzirom na os kroz središte mase:

$$\boldsymbol{I = I_{CM} + md^2,}$$

gdje je $\boldsymbol{I_{CM}}$ moment tromosti za os kroz središte mase, ***I*** je moment tromosti s obzirom na paralelnu os, ***d*** je udaljenost između osi

Moment tromosti vrtjelice za os kroz središte mase određujemo pomoću izraza:

$$\boldsymbol{I_{CM} = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} - md^2}$$

2 boda

U našem eksperimentalnom zadatku imamo složeno tijelo, tako da bi se poučak o paralelnim osima trebao primjenitii za vrtjelicu i za štap.
Međutim, sa zadanim eksperimentalnim postavom dolazi do velikih odstupanja od očekivanih mjerenja. Problem je što postoji i kuglični ležaj koji je potreban zbog smanjenja trenja kako bi se dobili bolji mjerni rezultati, ali i njegova masa pridonosi rezultatu mjerenja.
Zbog navedenih tehničkih ograničenja pri izvođenju mjerenja teško je razlučiti doprinose štapa, vijaka, ležaja u mjerenjima. Stoga je u zadatku traženo pojednostavljenje i treba ostati na takvoj razini razmatranja, a koja je dovoljno dobra s obzirom na očekivani rezultat eksperimentalnog zadatka.

1 bod

Korišteni su štapovi (drvene letve bez kugličnog ležaja) mase do 9 g, duljine oko 30 cm, i vrtjelice masa oko 49,2 g .

Primjer rezultata mjerenja:

m = 49,2g

***d* / m**	***t* / s**	***T* / s**	**I_{CM} / kgm²**
0,30	11,01	1,101	0,0000225
0,25	10,06	1,006	0,0000214
0,20	9,02	0,902	0,0000234
0,15	7,84	0,784	0,0000213
0,10	6,47	0,647	0,0000203

$\bar{I}_{CM} = 2{,}18 \cdot 10^{-5}$ **kgm²**, $\Delta I_m = 0{,}0000016$ **kgm²**, $r_m = 17\%$

4 boda

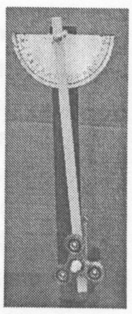
2. dio

m = 49,2 g
d = 30 cm

Vrtjelica učvršćena			
r.br.	***t* / s**	***T* / s**	**ΔT / s**
1.	10,76	1,076	0,003
2.	10,84	1,084	-0,005
3.	10,84	1,084	-0,005
4.	10,73	1,073	0,006
5.	10,72	1,072	0,007
6.	10,81	1,081	-0,002
7.	10,81	1,081	-0,002
8.	10,82	1,082	-0,003
9.	10,81	1,081	-0,002
10.	10,78	1,078	0,001
$\bar{T}$=1,079s, r_m=0,6%			

Vrtjelica slobodna			
r.br.	***t* / s**	***T* / s**	**ΔT / s**
1.	10,69	1,069	0,002
2.	10,68	1,068	0,003
3.	10,63	1,063	0,008
4.	10,72	1,072	-0,001
5.	10,72	1,072	-0,001
6.	10,75	1,075	-0,004
7.	10,66	1,066	0,005
8.	10,78	1,078	-0,007
9.	10,69	1,069	0,002
10.	10,78	1,078	-0,007
$\bar{T}$=1,071s, r_m=0,7%			

4 boda



Na osnovu rezultata mjerenja može se zaključiti da je period nešto manji u slučaju kada je vrtjelica tako postavljena da može rotirati oko okomite osi koja prolazi njezinim središtem.

Za vrijeme izvođenja ovog dijela eksperimentalnog zadatka opaža se da kad je vrtjelica postavljena na šipku tako da može rotirati oko vlastite osi, tijekom njihanja zapravo ostaje u istom položaju (s obzirom na opažača vezanog uz površinu Zemlje). Vrtjelica ne rotira oko svoje osi.

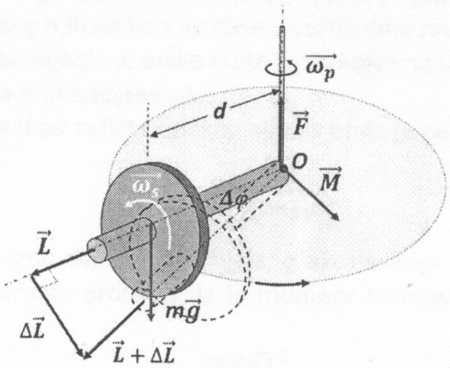
Na osnovu zakona očuvanja energije, kada se njihalo, odnosno sustav šipka-vrtjelica, giba prema svojem najnižem položaju, na račun smanjenja gravitacijske potencijalne energije povećava se rotacijska kinetička energija i središta mase sustava i vrtjelice. U ovom slučaju vrtjelica mora biti učvršćena. Ne rotira oko vlastite osi.

U slučaju da vrtjelica nije učvršćena i može rotirati oko osi koja prolazi okomito kroz njezino središte, bez trenja, jednako smanjenje gravitacijske potencijalne energije pretvara se u povećanje kinetičke energije rotacije središta mase šipke. Kako vrtjelica ne rotira oko vlastite osi, istovremeno je veće povećanje translacijske kinetičke energije središta mase sustava šipke-vrtjelica. Središte mase se giba brže i period je kraći.

3 boda

3. dio

Naša vrtjelica je zapravo zvrk. Zvrk je rotaciono simetrično tijelo koje se vrlo brzo vrti oko svoje osi simetrije. Zbog jednostavnosti prikaza umjesti vrtjelice na slici je nacrtan disk.



2 boda

Zarotiramo li tijelo oko osi prikazanoj na slici ono se nastavlja gibati oko čvrstog uporišta ili ovjesišta (O), ostajući stalno u horizontalnom položaju.

Kako je brzina rotacije osi malena u odnosu na brzinu rotacije tijela komponenta kutne količine gibanja koja dolazi od rotacije osi se može zanemariti.

Kutna količina gibanja zvrka $\vec{L}$ ima zato smjer osi rotacije zvrka i polagano rotira s njome oko točke O.

Iznos kutne količine gibanja jednak je: $L = I\omega_s$

gdje je I moment tromosti zvrka (fidget spinera) s obzirom na os rotacije, i ω_s kutna brzina rotacije zvrka.

Kako sila F u točki O nema momenta oko te točke, ukupni moment sila na zvrk dolazi od njegove težine $m\vec{g}$. Iznos tog momenta sile je: $M = mgd$,

gdje je d udaljenost centra mase zvrka od osi O. Smjer momenta sile $\vec{M}$ okomit je na smjer sile mg i osi rotacije.

Zbog djelovanja momenta sile dolazi do promjene kutne količine gibanja u vremenu Δt: $\vec{M} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$

Vektor promjene kutne količine gibanja (ili zamaha) $\overrightarrow{\Delta L}$, u okomitom je smjeru u odnosu na vektor kutne količine gibanja $\vec{L}$.

4 boda

Zvrk izvodi precesiju kutnom brzinom ω_p s obzirom na vertikalnu os.

Kut koji opiše os rotacije (vektor $\vec{L}$) u vremenu Δt iznosi: $\Delta\varphi = \frac{\Delta L}{L}$

Kutna brzina precesije jednaka je:

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Pula, 17.–20. travnja 2018.

Srednje škole - 4. skupina

1. Tijelo miruje u ishodištu inercijalnog sustava $\mathcal{S}$ do trenutka $t = 0$ kad se počne gibati jednoliko ubrzano u pozitivnom smjeru osi x. τ sekundi kasnije tijelo dosegne brzinu $\frac{4}{5}c$, nakon čega se nastavi jednoliko gibati tom brzinom. Nazovimo početak ubrzanog gibanja događaj A, a završetak ubrzanog gibanja događaj B.

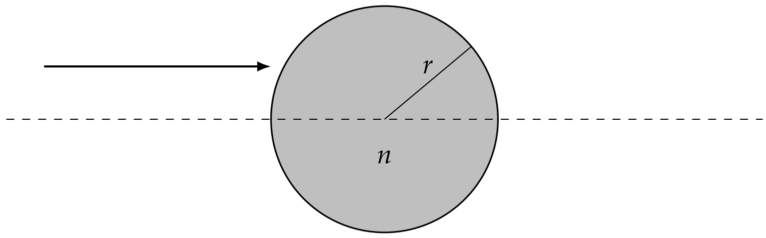
   - Odredite prostorno-vremenske koordinate (x', t') događaja A i B u inercijalnom sustavu $\mathcal{S}'$ koji se giba brzinom $\frac{4}{5}c$ u pozitivnom smjeru osi x u odnosu na $\mathcal{S}$.
   - Nađite kako položaj tijela ovisi o vremenu $x'(t')$ za promatrača iz $\mathcal{S}'$. Ograničite se na vremenski period između događaja A i B. Je li gibanje jednoliko ubrzano i u sustavu $\mathcal{S}'$?

   Odgovore zapišite preko zadanih veličina c, τ, te numeričkih faktora.

   [18 BODOVA]

2. Staklena kuglica polumjera $r = 5\,\mathrm{cm}$ i indeksa loma $n = 1.45$ smještena je na optičkoj osi, kao na slici. Pokažite da se sve paraksijalne zrake koje upadaju na kuglicu sijeku u istoj točki nakon izlaska s druge strane kuglice. Drugim riječima, za takve zrake kuglica predstavlja konvergentnu leću. Odredite efektivnu žarišnu duljinu f kuglice za paraksijalne zrake.

   Napomena: paraksijalne zrake su zrake svjetlosti koje upadaju paralelno optičkoj osi, te dovoljno blizu nje da se mogu iskoristi aproksimacije malih kutova.



   [13 BODOVA]

3. U središtu metalne izolirane sfere nalazi se izvor monokromatskog zračenja snage $P = 100\,\mathrm{W}$. Sfera na načinjena od srebra, čiji je izlazni rad $W = 4.5\,\mathrm{eV}$.

   - Kolika mora biti minimalna frekvencija zračenja ν_0 da bi se sfera mogla ionizirati fotoelektričnim efektom?

   U nastavku zadatka uzmite da je frekvencija zračenja $\nu = 2\nu_0$ te da svaki emitirani foton izbaci jedan elektron.

   - Koliko dugo mora biti uključen izvor zračenja da se sfera nabije nabojem $Q = 1\,\mathrm{C}$?
   - Kolika je ukupna kinetička energija svih izbačenih elektrona u tom slučaju?
   - Kojom se brzinom gibaju elektroni pri izlasku iz metala?

   Prilikom računa zanemarite elektrostatsko privlačenje pozitivno nabijene sfere i izbijenih elektrona.

   [15 BODOVA]

4. Hoyleova rezonanca pobuđeno je stanje jezgre ugljika ^{12}C s energijom pobuđenja $E^* = 7.7\,\text{MeV}$. U laboratorijskom sustavu, Hoyleova rezonanca se, iz mirovanja, raspada na tri identične alfa-čestice, tj. jezgre helija ^{4}He,

$$^{12}\text{C}^* \longrightarrow 3 \times {}^4\text{He}.$$

U točestičnim raspadima poput ovog, kinematika produkata nije jednoznačno zadana (za razliku od dvočestičnih raspada!) već postoji beskonačno različitih kombinacija energija i međusobnih kutova koju tri alfa-čestice mogu poprimiti. Međutim, postoji sustavan način za analizu točestičnih raspada, putem tzv. Dalitzovog dijagrama.

- Za početak izračunajte Q vrijednost ove reakcije. Ukoliko je dobivena vrijednost puno manja ($<$ 1%) od energije mirovanja jezgre helija, dalje možete koristite formule nerelativističke kinematike, dok je u suprotnom potrebno koristiti formule relativističke kinematike.
- Uvedite kinematičke varijable $t_i = T_i/Q$, gdje je T_i kinetička energija i-te alfa-čestice, te θ_{ij} kao kut između i-te i j-te alfa-čestice. Koristeći zakone očuvanja, prikažite sve t_i varijable pomoću Dalitzovih varijabli x i y definiranih preko

$$x = \sqrt{3}(t_1 - t_2), \quad y = 2t_3 - t_1 - t_2.$$

  Osim toga, pokažite i da se svi kutovi θ_{ij} mogu izraziti preko kinetičkih energija t_i, pa, posredno, i preko x i y. Dakle, kinematika produkata točestičnog raspada je u potpunosti određena parametrima x i y.
- Da biste odredili dozvoljene vrijednosti Dalitzovih parametara u xy ravnini, prisjetite se da kinetička energija svake alfa-čestice ne smije biti negativna, $t_i \geq 0$. Odredite kako ove nejednakosti ograničavaju dozvoljene vrijednosti Dalitzovih parametara u xy ravnini.
- Osim pozitivnosti kinetičkih energija, i međusobni kutovi među česticama moraju zadovoljavati određeni uvjet, $\cos\theta_{ij} \in [-1, +1]$. Kako ovaj zahtjev dodatno ograničava dozvoljene vrijednosti u xy ravnini? Dovoljno je samo promotriti kut θ_{12}.
- Označite područje na dozvoljenom dijelu dijagrama gdje vrijedi $t_1 = t_2$. Koje sve vrijednosti može poprimiti t_3 u tom slučaju?
- Označite područje na dozvoljenom dijelu dijagrama gdje vrijedi $\theta_{12} = \pi/2$. Koje sve vrijednosti može poprimiti t_3 u tom slučaju?

Energije mirovanja jezgri ugljika i helija su $m(^{12}\text{C})c^2 = 11.178\,\text{GeV}$ i $m(^4\text{He})c^2 = 3.727\,\text{GeV}$.

[24 BODOVA]

Vrijednosti fizikalnih konstanti:

- brzina svjetlosti: $c = 3.00 \times 10^8\,\text{m/s}$;
- elementarni naboj: $e = 1.60 \times 10^{-19}\,\text{C}$;
- masa elektrona: $m = 9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg}$;
- Planckova konstanta: $h = 6.63 \times 10^{-34}\,\text{m}^2\text{kg/s} = 4.14 \times 10^{-15}\,\text{eV s}$;

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Pula, 17.–20. travnja 2018.

Srednje škole - 4. skupina, rješenja i smjernice za bodovanje

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ukoliko učenici riješe zadatak drugačijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. Veza između koordinata događaja u inercijalnim sustavima $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$ je dana standardnim Lorentzovim transformacijama

$$x' = \gamma(x - vt), \qquad t' = \gamma(t - vx/c^2),$$

gdje je v brzina $\mathcal{S}'$ u odnosu na $\mathcal{S}$, a $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Koordinate događaja A i B u sustavu $\mathcal{S}$ su

$$(x_A, t_A) = (0, 0), \qquad (x_B, t_B) = (2c\tau/5, \tau), \qquad \text{[3 BODA]}$$

jer se čestica gibala konstantom akceleracijom $a = \dfrac{4c}{5\tau}$ iz mirovanja pa je u vremenu τ prevalila put

$$s = \frac{1}{2}\frac{4c}{5\tau}\tau^2 = \frac{2}{5}c\tau.$$

- Koristeći gore navedene Lorentzove transformacije, uz $v = 4c/5$, imamo za koordinate događaja A i B u $\mathcal{S}'$

$$(x'_A, t'_A) = (0, 0), \qquad (x'_B, t'_B) = (-2c\tau/3, 17\tau/15). \qquad \text{[3 BODA]}$$

- Da bismo odredili vremensku ovisnost $x'(t')$, naprosto shvatimo putanju $x(t)$ u $\mathcal{S}$ kao niz događaja s koordinatama

$$(x(t), t) = \left(\frac{1}{2}\frac{4c}{5\tau}t^2, t\right), \qquad \text{[2 BODA]}$$

te iskoristimo gornje Lorentzove transformacije. Kao rezultat imamo

$$x'(t) = \frac{4}{3}\left(\frac{t}{2\tau} - 1\right)ct, \qquad t'(t) = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{8}{25}\frac{t}{\tau}\right)t. \qquad \text{[4 BODA]}$$

Posljednju relaciju možemo invertirati rješavanjem kvadratne jednadžbe,

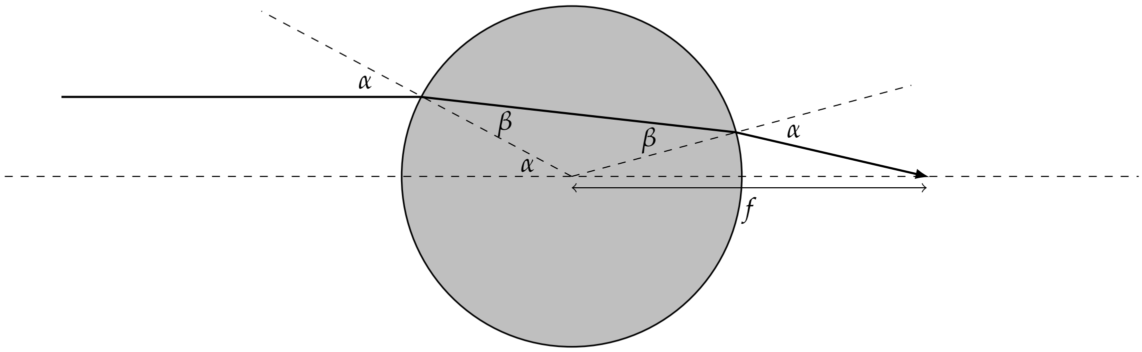
$$t(t') = \frac{25}{16}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{96}{125}\frac{t'}{\tau}}\right)\tau, \qquad \text{[2 BODA]}$$

gdje smo predznak ispred korijena odabrali tako da vrijedi $t(t' = 0) = 0$. Uvrštavanjem ove formule u formulu za $x'(t)$ i sređivanjem, imamo

$$x'(t') = -\frac{5}{4}\left[\frac{t'}{\tau} - \frac{15}{16}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{96}{125}\frac{t'}{\tau}}\right)\right]c\tau. \qquad \text{[2 BODA]}$$

Iz posljednjeg je izraza očito da se u sustavu $\mathcal{S}'$ ne radi o jednoliko ubrzanom gibanju. [2 BODA]

2. Promotrimo kako se lomi jedna paraksijalna zraka:



[2 BODA]

Veza između kutova α i β je dana Snellovim zakonom

$$\sin\alpha = n\sin\beta. \qquad [2\ \text{BODA}]$$

S druge strane, žarišnu duljinu f možemo povezati s polumjerom kuglice r pomoću sinusnog poučka,

$$\frac{f}{r} = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin(2\alpha-2\beta)} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2(\alpha-\beta)}. \qquad [3\ \text{BODA}]$$

U paraksijalnoj aproksimaciji možemo pisati

$$\sin\alpha \approx \alpha, \quad \sin\beta \approx \beta, \quad \sin 2(\alpha-\beta) \approx 2(\alpha-\beta). \qquad [3\ \text{BODA}]$$

Iz svega slijedi

$$f = \frac{r}{2(1-1/n)} \qquad [2\ \text{BODA}]$$

$$= 8.06\,\text{cm}. \qquad [1\ \text{BOD}]$$

3. • Emitirano zračenje frekvencije ν se sastoji od fotona energije $h\nu$, gdje je h Planckova konstanta. Prema tome, foton koji će izbaciti elektron iz metala mora imati barem toliko energije da savlada izlazni rad.

$$\begin{aligned} \nu_0 &= W/h && \text{[2 BODA]} \\ &= 1.09 \times 10^{15}\,\text{Hz}. && \text{[1 BOD]} \end{aligned}$$

• Izvor snage P kroz vrijeme Δt emitira ΔN fotona frekvencije $h\nu$, tako da vrijedi

$$P = \frac{\Delta N}{\Delta t} h\nu. \qquad \text{[2 BODA]}$$

Ako svaki foton izbije jedan elektron, onda ΔN mora biti jednak broju elektrona koji (po iznosu) čine ukupni naboj Q,

$$\Delta N = \frac{Q}{e}, \qquad \text{[1 BOD]}$$

gdje je e naboj elektrona. Odavde je

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta N}{P} h\nu = 2\frac{QW}{eP} && \text{[2 BODA]} \\ &= 0.09\,\text{s}. && \text{[1 BOD]} \end{aligned}$$

Ovdje smo iskoristili uvjet zadatka $\nu = 2\nu_0 = 2W/h$.

• Ukupna kinetička energija izbačenih elektrona je razlika ukupne energije fotona i izlaznog rada potrebnog da se svi elektroni izbace iz metala

$$\begin{aligned} E_\text{k} &= \Delta N(h\nu - W) = \frac{QW}{e} && \text{[2 BODA]} \\ &= 4.5\,\text{J}. && \text{[1 BOD]} \end{aligned}$$

• Brzina svakog elektrona se lako dobije iz poznate kinetičke energije pojedinog elektrona

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2W}{m}} && \text{[2 BODA]} \\ &= 1.26 \times 10^{6}\,\text{m/s}. && \text{[1 BOD]} \end{aligned}$$

4.
- Q vrijednost reakcije jednaka je razlici energije mirovanja početne jezgre i produkata. Budući da je raspad krenuo iz pobuđenog stanja, Q vrijednost reakcije je

$$\begin{aligned} Q &= m(^{12}\mathrm{C})c^2 + E^* - 3m(^4\mathrm{He})c^2 && \text{[2 BODA]} \\ &= 4.7\,\mathrm{MeV}. && \text{[1 BOD]} \end{aligned}$$

Dobivena Q vrijednost je pozitivna, što znači da dolazi do spontanog raspada, i manja je od jednog postotka vrijednosti energije mirovanja alfa-čestice, pa u nastavku koristimo nerelativističke izraze za kinetičku energiju alfa-čestica. [1 BOD]

- Zakon očuvanja energije, zapisan preko kinetičkih energija i Q vrijednosti glasi

$$T_1 + T_2 + T_3 = Q \quad \rightsquigarrow \quad t_1 + t_2 + t_3 = 1. \qquad \text{[1 BOD]}$$

Sve kinetičke energije možemo odmah izraziti u terminima Dalitzovih varijabli x i y,

$$t_1 = \frac{2+\sqrt{3}x-y}{6}, \quad t_2 = \frac{2-\sqrt{3}x-y}{6}, \quad t_3 = \frac{1+y}{3}. \qquad \text{[3 BODA]}$$

Zakon očuvanja količine impulsa glasi

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{0}, \qquad \text{[1 BOD]}$$

jer se početna jezgra raspala iz mirovanja. Da bismo dobili kut između, npr. alfa-čestice 1 i 2, pišemo

$$-\vec{p}_3 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad \rightsquigarrow \quad p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta_{12},$$

odakle odmah imamo

$$\cos\theta_{12} = \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2}{2p_1p_2} = \frac{t_3 - t_1 - t_2}{2\sqrt{t_1t_2}}, \qquad \text{[2 BODA]}$$

te slično i za ostale kutove. Ovdje smo koristili vezu između kinetičke energije i iznosa količine gibanja $p = \sqrt{2mT}$.

- Uvjet na pozitivnost kinetičkih energija vodi na sljedeće uvjete

$$\begin{aligned} t_1 \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad y \leq 2 + \sqrt{3}x && \text{[1 BOD]} \\ t_2 \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad y \leq 2 - \sqrt{3}x && \text{[1 BOD]} \\ t_3 \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad y \geq -1 && \text{[1 BOD]} \end{aligned}$$

Dobiveno područje predstavlja jednakostraničan trokut u xy ravnini s vrhovima u točkama $(0,2)$, $(\pm\sqrt{3},-1)$, kako je prikazano na slici. [2 BODA]

- Za uvjet na kut imamo

$$|\cos\theta_{12}| \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (t_3 - t_1 - t_2)^2 \leq 4t_1t_2 \quad \Longleftrightarrow \quad t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \leq 2(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1),$$

[2 BODA]

a zadnja se nejednakost, koristeći prethodne rezultate, može svesti na uvjet

$$x^2 + y^2 \leq 1, \qquad \text{[2 BODA]}$$

što predstavlja jedinični krug u xy ravnini, prikazan na slici. Nije teško vidjeti da je dobiveni krug upisan u prethodno dobiveni trokut, i time smo dobili da je područje Dalitzovih parametara x i y koji su dozvoljeni zakonima očuvanja upravo jednični krug u xy ravnini. Valja napomenuti da je uvjet na kutove simetričan u varijablama t_i pa bismo isti rezultat dobili promatranjem bilo kojeg kuta θ_{ij}.

- Slučaj $t_1 = t_2$ odgovara području $x = 0$ unutar jediničnog kruga, kako je naznačeno na slici. Druga varijabla, y može poprimiti vrijednost $y \in [-1, +1]$, što znači da kinetička energija treće čestice može poprimiti vrijednosti

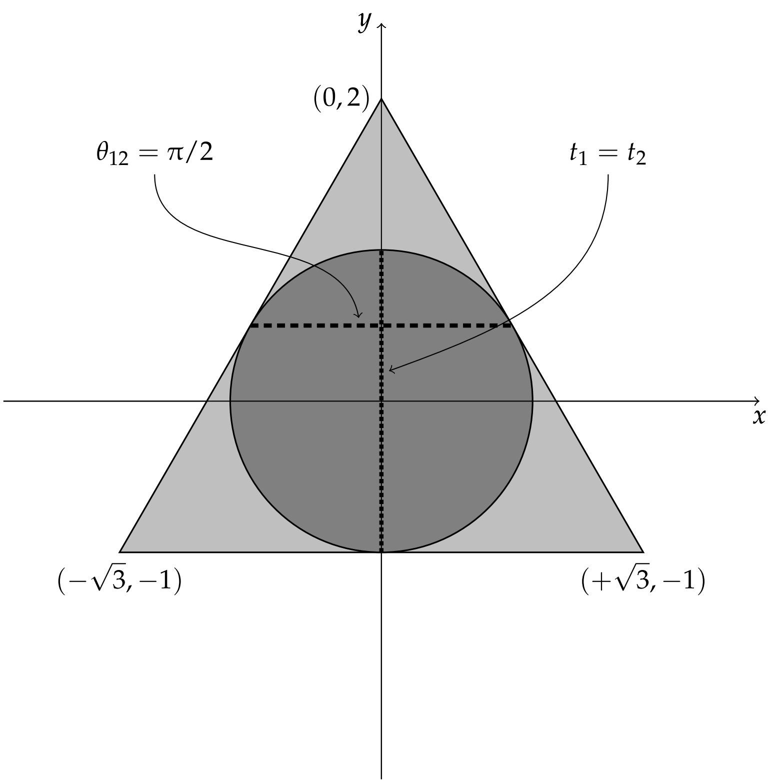
$$t_3 \in [0, 1].$$ [2 BODA]

- Slučaj $\theta_{12} = \pi/2$ daje $\cos\theta_{12} = 0$, odnosno $t_3 = t_1 + t_2$. Ovo pak, u kombinaciji s prethodnom izvedenim rezultatima znači da treća čestica ima fiksnu energiju u ovom slučaju

$$t_3 = \frac{1}{2}.$$ [1 BOD]

Dalitzovi parametri poprimaju vrijednosti

$$x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2}\right], \quad y = \frac{1}{2}.$$ [1 BOD]



Slika 1: Dalitzov dijagram

DRŽAVNO NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Pula, 17. – 20. travnja 2018.

Srednje škole – 4. grupa

EKSPERIMENTALNI ZADATAK

Pribor:

- staklena čaša
- tanki drveni štapić za roštilj
- spužva
- škare
- ravnalo
- pomična mjerka
- tanki flomaster
- bočica s vodom
- posuda s uljem
- papirnati ubrusi

Zadatak:

1. Odredite indeks loma za vodu i ulje tako da:
   a) opišete teorijsku osnovu eksperimentalnog postupka uz odgovarajuću skicu i algebarski izraz … 4 boda
   b) opišete način rada uz odgovarajuću skicu i korištene izraze … 6 bodova
   c) tablično prikažete rezultate za minimalno pet mjerenja za vodu i za ulje … 6 bodova
   d) provedete račun slučajnih pogrešaka uz zapis točnog rezultata i određivanje relativne maksimalne pogreške … 6 bodova
   e) ukratko komentirate preciznost mjerenja prema dobivenoj maksimalnoj relativnoj pogrešci … 2 boda
   f) usporedite dobivene rezultate indeksa loma za vodu i ulje … 1 bod
   g) navedete na koji ste način postigli što veću preciznost mjerenja … 2 boda
   h) prema stečenom eksperimentalnom iskustvu nabrojite minimalno tri čimbenika koji su utjecali na preciznost mjerenja … 2 boda
   i) navedete barem jedno područje u kojem je danas uspješna primjena teorijske osnove koja je omogućila određivanje indeksa loma … 1 bod

---

Ukupno: ……………………………………………………………………………**30 bodova**

Natjecateljima želimo uspješan rad!

DRŽAVNO NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Pula, 17. – 20. travnja 2018.

Srednje škole – 4. grupa

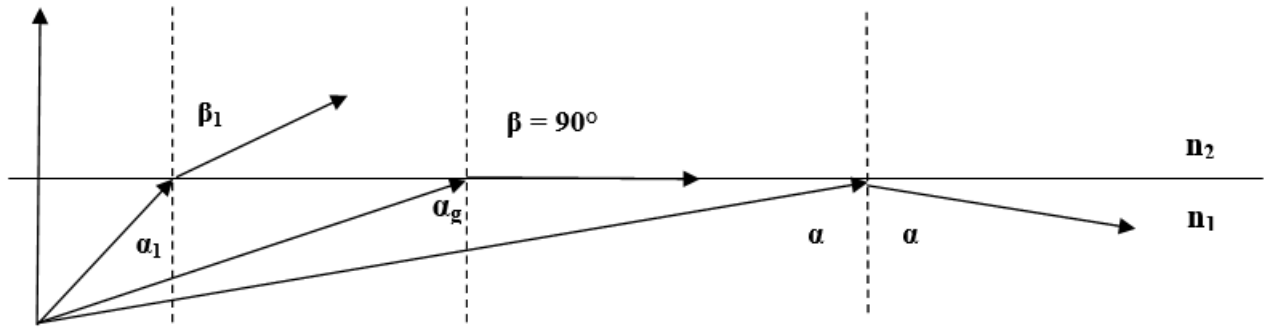
EKSPERIMENTALNI ZADATAK – rješenje

1. Odredite indeks loma za vodu i ulje tako da:

a) opišete teorijsku osnovu eksperimentalnog postupka uz odgovarajuću skicu i algebarski izraz … 4 boda

Eksperimentalni zadatak određivanja indeksa loma za vodu i ulje riješit ćemo primjenom totalne refleksije.

Totalna refleksija je pojava koja se javlja pri prijelazu svjetlosti iz optički gušćeg u optički rjeđe sredstvo. Kut loma za zrake koje prelaze iz optički gušćeg u optički rjeđe sredstvo postaje sve veći kako se povećava upadni kut (slika 1). Za određeni upadni kut α_g, kut loma β bit će jednak 90°. Taj upadni kut (α_g) nazivamo graničnim kutom. Daljnjim povećavanjem upadnog kuta ($\alpha > \alpha_g$), svjetlost ne može izaći iz gušćeg sredstva jer se potpuno odbija natrag u sredstvo po zakonu refleksije.



Slika 1. Skica uz objašnjenje totalne refleksije

Granični kut određujemo primjenom Snelliusova zakona loma:

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta \qquad (1)$$

Kut β iznosi 90° kada je $\alpha = \alpha_g$, te prema relaciji (1) slijedi:

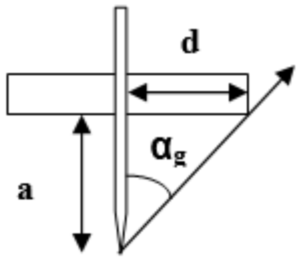
$$\sin\alpha_g = \frac{n_2}{n_1} \qquad (2)$$

Kada svjetlost prelazi iz sredstva apsolutnog indeksa loma n u vakuum, odnosno zrak, $n_2 = 1$, tada relacija (2) prelazi u:

$$\sin\alpha_g = \frac{1}{n} \qquad (3)$$

b) opišete način rada uz odgovarajuću skicu i korištene izraze … 6 bodova

Čašu do vrha napunimo sredstvom (voda ili ulje – preporuča se prvo napraviti sva mjerenja s vodom). Kroz sredinu spužve provučemo drveni štapić do veće duljine i zatim spužvu stavimo na čašu i izravno na sredstvo. Štapić zatim pomičemo prema gore kroz spužvu sve dok više ne vidimo vrh štapića – tada je došlo do totalne refleksije.



Prema slici 2 vidljivo je da mjerimo duljinu štapića u sredstvu (a) i udaljenost od ruba spužve (kut opažanja) do štapića. Granični kut odredimo prema izrazu:

$$\operatorname{tg}\alpha_g = d / a \qquad (4)$$

Prema Snelliusovu zakonu loma primijenjenom na totalnoj refleksiji i relaciji (3) dobijemo izraz za indeks loma:

$$n = \frac{1}{\sin\alpha_g} \qquad (5)$$

c) tablično prikažete rezultate za minimalno pet mjerenja za vodu i za ulje … 6 bodova

Organizacija podataka koje prikupljamo tijekom mjerenja značajan je dio svakog eksperimentalnog rada. Tablični prikaz povećava zornost i preglednost izmjerenih i izračunatih veličina (npr. pojedinačno odstupanje od srednje vrijednosti), te stoga tablica treba biti smisleno i svrsishodno organizirana sa svim potrebnim jasno određenim stupcima i redovima, a iznad tablice treba napisati odgovarajući naslov koji ukazuje na to koji se podaci u tablici nalaze.

Primjer tabličnog prikaza:

Tablica 1. Tablični prikaz rezultata određivanja indeksa loma za vodu

Redni broj mjerenja	d/m	h/m	α_g/ °	n_i	$n_i - \overline{n}$
1.					
…					
5.					

U istoj tablici, uz dobru organizaciju i jasno označavanje redaka i stupaca, mogu biti rezultati mjerenja i za vodu i za ulje.

d) provedete račun slučajnih pogrešaka uz zapis točnog rezultata i određivanje relativne maksimalne pogreške … 6 bodova

Računom slučajnih pogrešaka procjenjujemo točnost kojom smo izmjerili određenu veličinu, pri čemu određujemo:

- aritmetičku sredinu ili srednju vrijednost svih pojedinih mjerenja: $\overline{n} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} n_i$ (6)
- razlike između srednje vrijednosti i svakog pojedinačnog mjerenja: $\Delta n_i = (\overline{n} - n_i)$ (7)
- apsolutnu vrijednost maksimalnog pojedinačnog odstupanja: $| \Delta n_{i\,max} |$ (8)
- zapis točnog rezultata: $n = (\overline{n} \pm | \Delta n_{i\,max} |)$ (9)
- maksimalnu relativnu pogrešku koju najčešće izražavamo u postocima:

$$r_m = \left(\frac{| \Delta n_{i\,max} |}{\overline{n}} \cdot 100 \right) \% \qquad (10)$$

Obzirom da se eksperimentalni zadatak odnosi na određivanje indeksa loma za dva različita sredstva, vodu i ulje, potrebno je posebno provesti navedeno za oba sredstva.

e) ukratko komentirate preciznost mjerenja prema dobivenoj maksimalnoj relativnoj pogrešci … 2 boda

Ovdje je potreban kratki komentar analize r_m u odnosu na srednje vrijednosti n za oba sredstva. Veća r_m znači i veću pogrešku, a moguće uzroke treba navesti pod g).

f) usporedite dobivene rezultate indeksa loma za vodu i ulje … 1 bod

Potrebna je konkretna usporedba dobivenih rezultata međusobno i zatim u odnosu na poznatu teorijsku vrijednost indeksa loma vode od 1,33. Obzirom na sve što utječe na preciznost mjerenja, uzet će se u obzir konkretno dobiveni rezultati indeksa loma korištenog ulja.

g) navedete na koji ste način postigli što veću preciznost mjerenja … 2 boda

Povezano s točkom e), veća r_m znači da je potrebno i više promišljanja o tome što je sve utjecalo na preciznost mjerenja. Svakako bi trebalo spomenuti uvjet opisan pod b) – da čaša mora biti potpuno ispunjena sredstvom, tako da spužva ide izravno na sredstvo i rub čaše, - da se koristi pomična mjerka za mjerenje duljine drvenog štapića u sredstvu s noniusovom skalom (desetinka milimetra), - da se flomasterom može označiti (točkica, duža crtica, cijeli opseg – razni načini za razna mjerenja) onaj dio štapića iznad kojeg se nalazi spužva i njegova pozicija na spužvi, tako da se štapić može izvaditi i zatim preciznije mjeriti pomičnom mjerkom.

h) prema stečenom eksperimentalnom iskustvu nabrojite minimalno tri čimbenika koji su utjecali na preciznost mjerenja … 2 boda

Ova točka je neizostavni dio svakog eksperimentalnog rada – uzet će se u obzir sve što je navedeno, a ima veze s organizacijom eksperimentalnog seta i vršenjem mjerenja.

i) navedete barem jedno područje u kojem je danas uspješna primjena teorijske osnove koja je omogućila određivanje indeksa loma … 1 bod

Primjena totalne refleksije: npr. - u optičkim instrumentima često se nalaze prizme za totalnu refleksiju; - vrlo velika primjena u telekomunikacijama, medicini i industriji: vodiči svjetlosti ili svjetlovodi.

Ukupno: ……………………………………………………………………………30 bodova